LP02 - Gravitation

Cléments (Colléaux et de la Salle)

13 mai 2020

Niveau : L1

Bibliographie

✍ Salamito, j'intègre, PCSI

Prérequis

➢ Mécanique du point

Expériences

☕ Ya R

Table des matières

Introduction

On sait aujourd'hui que la gravité est l'une des quatre forces fondamentales (avec l'électromagnétisme, la force faible et la force forte, à ne pas confondre avec la force nucléaire forte, qui est sa résultante !). Mais historiquement, elle a été la première être étudiée et il a fallu de loooongues années (et du gros fight de scientifiques ✍ *BUP 858*) avant d'arriver à un formalisme final tel que nous le connaissons. C'est en effet évidemment la force dont nous faisons en permanence l'expérience quotidiennement.

Voyons comment on peut construire cette force à partir des observations et comment ensuite décrire les trajectoires et champs gravitationnels...

1 Force gravitationnelle

1.1 Construction

Pour construire la force gravitationnelle, telle qu'on la connait actuellement, on ne va pas suivre un chemin vraiment historique (mais possible aussi : Brumaghupta au VII^e sicèle)... Par exemple on va se servir de la seconde loi de Newton et des observations de Kepler, alors que la première arrive bien après ces dernières...

Système de Copernic Copernic met le Soleil au centre du système solaire et dit que toutes les planètes tournent autour.

Galilée Bien que lui aussi convaincu par le système de Copernic, contrairement à son poto Kepler, Galilée pensait que les trajectoires étaient circulaires uniformes... Prenons cette approximation pour nous aider !

3*e* loi de Kepler Pour toutes les planètes du système solaire, si on note r leur distance au Soleil et T leur période de révolution autour du Soleil, alors le rapport r^3/T^2 est constant.

2*e* loi de Newton On cherche une force proportionnelle à l'accélération $\mathbf{a}$.

3*e* loi de Newton Tmtc

Puisque le mouvement est circulaire, on repère la position de la planète en coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e_r}$$

Donc on en déduit la vitesse et l'accélération :

$$\mathbf{v} = r\frac{2\pi}{T}\,\mathbf{e}_\theta \implies \mathbf{a} = -r\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathbf{e_r}$$

Déjà on voit venir que la force est dirigée vers le Soleil... De plus, la troisième loi de Kepler, se traduit directement par

$$\frac{r^3}{T^2} = \text{cste} \implies \mathbf{F} = m\mathbf{a} \propto -\frac{m}{r^2}\,\mathbf{e_r}$$

De plus, avec la troisième loi de Newton, si la masse de la planète m intervient, il faut nécessairement que la masse de l'autre corps (Soleil de masse M) apparaisse de manière symétrique.

Finalement, on peut dire que

$$\mathbf{F} \propto -\frac{mM}{r^2}\,\mathbf{e_r}$$

1.2 Énoncé

Bon bah voilà, y a plus qu'à nommer $\mathcal{G}$ la constante de proportionnalité et on a :

Pour deux corps à des positions $\mathbf{r_1}$ et $\mathbf{r_2}$ de masses respectives m_1 et m_2,

La force qu'exerce 2 sur 1 est

$$\mathbf{F_{21}} = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1})}{||\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}||^3}$$

La force qu'exerce 1 sur 2 est

$$\mathbf{F_{12}} = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2})}{||\mathbf{r_2}-\mathbf{r_1}||^3}$$

On préfèrera noter la force de 2 sur 1 avec le vecteur unitaire $\mathbf{e_r}$ dirigée de 1 vers 2 et r la distance qui sépare les deux corps :

$$\mathbf{F_{21}} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\mathbf{e_r}$$

Remarque

Sur Terre, on ressent un champ constant, pas en $1/r^2$, je laisse au lecteur l'occasion de chercher lui-même la réponse... Aller un petit indice : on pose $f(r) = \text{Arcseqh}\frac{\sqrt{\pi}}{7r}$

OdG

$\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}$ m^3/kg/s2 et balancer des OdG de la force en la comparant aux autres forces

Mesure de masse

Avec la troisième loi de Kepler, en connaissant la distance et la période on peut mesurer une masse en étudiant le mouvement

Symétrie sphérique

L'hypothèse cachée c'est la symétrie sphérique de la répartition de la masse de la Terre. On peut faire le calcul de l'intégrale pour une répartition quelconque ou revenir dessus après le calcul de **G** et on voit que ça revient bien à une masse ponctuelle quand on est à l'extérieur de l'astre.

1.3 Analogie avec l'électromagnétisme

Analogie avec E mais c'est L2

On peut aussi faire le lien entre **G** et **E**. On peut aussi calculer les rotationnels et divergence du champ gravitationnel : le champ est le grad d'un potentiel $\varphi(r)$ donc le rot est nul et pour la divergence, on rentre le div dans l'intégrale et ça fait apparaitre le laplacien et on admet que le laplacien donne $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$. L'analogie avec **E** est alors directe, mis à part le signe de m qui peut pas changer, contrairement à q. Si on a du temps on peut donc appliquer le théorème de Gauss pour déterminer $\mathbf{G}$. Autre méthode : analogie décrite juste après et on dit que donc div et grad ça doit être ça..

Évidemment on peut pas s'empêcher de voir que ça ressemble à l'interaction de COULOMB entre deux particules chargées (à l'époque ils connaissaient pas, attention aux anachronismes !).

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\mathbf{e_r}$$

Gravité	Électromagnétisme
m	q
$\mathcal{G}$	$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$

Attention cependant aux limites suivantes :

— Les charges q peuvent être négatives alors que la masse est nécessairement positive

— De cette remarque découle le fait que l'interaction électrostatique peut-être répulsive $q_1 q_2 > 0$ alors que la gravité est toujours attractive

— Les échelles ne sont pas du tout les mêmes, l'interaction de COULOMB est totalement négligeable à l'échelle des mouvements des corps planétaires.

Maintenant on va retrouver les vraies trajectoires, et les lois précédemment utilisées !

2 Trajectoires et énergie

2.1 Loi des aires

La loi dites *des aires*, (deuxième de loi de KEPLER) énonce que : pendant des durées égales, le vecteur joignant le Soleil à la planète balaye des aires égales

On peut balancer une petite animation ? Ceci a pour conséquence que la planète va plus vite lorsque se rapproche de l'étoile... Merci Camille pour cette petite vidéo sur laquelle on voir une étoile accélérer DE OUF en passant tout près du trou noir de la voie lactée : `https://www.eso.org/public/videos/eso0226a/`

Commençons par écrire la deuxième loi de NEWTON (bien faire le bilan des forces gnagnagna) :

$$m\mathbf{a} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\,\mathbf{e_r}$$

Mais ne faisons aucune hypothèse sur la nature du mouvement ! Il est particulièrement intéressant, (dans le cas général des forces centrales) d'étudier le moment cinétique :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \implies \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{0}$$

En effet on a

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Et puisque $\mathbf{a} \parallel \mathbf{r}$, alors on a bien conservation du moment cinétique.

Mais conservation d'un vecteur, ça veut dire deux choses :

Conservation de la direction Ainsi $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$ sont toujours orthogonaux à $\mathbf{L}$, donc le mouvement est contenu dans un plan (orthogonal à $\mathbf{L}$. Ceci justifie le fait qu'on utilise des coordonnées polaires (r, θ).

Conservation de la norme Dans ces coordonnées, on a

$$\begin{cases} \mathbf{r} = r\mathbf{e_r} \\ \mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e_r} + r\dot{\theta}\mathbf{e_\theta} \end{cases} \implies \mathbf{L} = mr^2\dot{\theta}\,\mathbf{e_z}$$

Donc la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est conservée.

La quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. L'appelle **constante des aires**, voyons pourquoi !

On retrouve la deuxième loi de Kepler... En effet en un temps $\mathrm{d}t$, le vecteur $\mathbf{r}$ balaye un triangle d'aire $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}r \cdot r\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}C\mathrm{d}t$. Donc l'aire balayée est bien une constante du mouvement !

Remarque

Il existe une jolie méthode pour voir géométriquement d'où vient cette loi des aires. C'est une méthode de Newton, reprise par Feynmann très satisfaisante. Elle est décrite dans le ✍ *BUP 858* , mais je trouve ça bof comme explication... Sinon ce type s'y prend très bien :
`https://www.youtube.com/watch?v=2cj0SDt6mfo`

2.2 Potentiel effectif

À présent, on a les outil en main pour décrire (plus ou moins) qualitativement les trajectoires envisageables. Passons par l'énergie !

On remarque que la force est conservative :

$$\mathbf{F} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}\,\mathbf{e_r} = -\mathbf{grad}\,E_p \qquad E_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

De plus, l'énergie cinétique peut se réécrire :

$$E_c = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$$

Donc tout se passe comme si le problème était à une dimension r avec une potentiel effectif $E_{p,eff}(r)$ tel que

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \qquad E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM}{r}$$

On peut tracer ce potentiel et distinguer plusieurs cas :

$E < 0$ La trajectoire est reste entre deux valeurs r_{min} et r_{max}, comme pour les planètes. On peut montrer (compliqué) que la trajectoire est en plus fermée et en forme d'**ellipse**. On appelle ces états les **états liés**. Remarquons de plus, que le trajectoire circulaire correspond à une énergie minimale.

$E = 0$ Il n'y a plus de rayon minimal... Une ellipse dont l'un des foyers est parti à l'infini est une **parabole**

$E > 0$ De même, le corps se rapproche de l'étoile puis s'éloigne, la trajectoire est une **hyperbole**. Ce sont de **états libres**.

Balancer le petit programme Python trouvé sur le site de Camille <3. Pour les intéressés, le théorème de BERTRAND stipule que les seules trajectoires fermées possibles (pour des forces centrales) sont celles pour des forces en r (oscillateur harmonique) et en $1/r^2$.

2.3 Étude la trajectoire circulaire

✍ *Salamito, p.774*

Pour une trajectoire circulaire, $\dot{r} = 0$ donc

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\,\mathbf{e_r} + r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$

Alors la deuxième loi de NEWTON donne selon $\mathbf{e}_\theta$ que le mouvement est uniforme ($\ddot{\theta} = 0$) donc on peut réécrire

$$\mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\,\mathbf{e_r} \qquad v = r\dot{\theta}$$

De sorte que la projection sur $\mathbf{e_r}$ donne

$$-m\frac{v^2}{r} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}$$

Donc la vitesse a pour expression

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}}}$$

Dès lors, on peut exprimer les différentes énergies et remarquer que l'on a

$$\boxed{E_p = -2E_c = 2E_m = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}}$$

2.4 Loi des périodes

> La loi des périodes (troisième loi de KEPLER) énonce que pour toutes les planètes du système solaire, la quantité a^3/T^2 est la même (a est le demi-grand-axe de l'ellipse)

Restons dans le cas où le mouvement est circulaire uniforme, alors on a $a = r$ et ainsi

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}} \implies \frac{r^3}{T^2} = rv^2 = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$$

On retrouve donc la troisième loi de KEPLER, mais nous on connait la constante !

3 Astronautique

3.1 Satellites géostationnaires

✍ *Salamito, p.776*

3.2 Vitesses cosmiques

✍ *Salamito, p.779*

Conclusion

C'est une théorie qui marche bien et qui a fait ses preuves : on peut citer par exemple la prédiction de l'existence de Neptune (Le Verrier en 1846) avant son observation (Galle la même année).

Pour aller plus loin, on pourrait, tout en restant dans les limites de la mécanique classique étudier l'effet des distributions de masse. Ce serait l'occasion de prolonger l'analogie avec l'électrostatique !

Et pour aller encore plus loin, on pourrait remettre en cause certaines choses : le caractère instantané de la force de gravité ($\rightarrow$ ondes gravitationnelles), on observe que le périhélie de Vénus se décale (perturbation de l'ellipse), ceci s'explique en prenant en compte les effets relativistes...

Questions

Quelle est la charge gravitationnelle ? Quel principe lui est liée ? A quel ordre est-il actuellement vérifié ? (Masse grave égale à la masse inerte d'après le principe d'équivalence. Universalité de la chute libre. Vérifié à l'heure actuelle à 10^{-13})

Quel est la force à l'intérieur d'un astre homogène à symétrie sphérique ? Champ dans une cavité interne ? Comment cela est-il utilisé ?

(Force linéaire en la distance, champ constant dans une cavité interne. Utilisé pour faire de la gravimétrie, recherche de gisement de pétrole, archéologie)

Validité du théorème de Gauss ? Équations locales du champs ?

Si le Soleil disparaissait, quel serait le mouvement de la Terre ? Cela ce ferait-il de manière instantanée ?

(Mouvement rectiligne uniforme instantanément d'après Newton, en contradiction avec la relativité. Propagation du champ à une vitesse limite c, 8 minutes environ entre la Terre et le Soleil)

Qu'est ce qu'une onde gravitationnelle ? Quel événement à donné lieu à l'observation récente des signaux d'onde gravitationnelles par LIGO ?

(Une onde gravitationnelle est une faible déformation de l'espace-temps, similaire à une onde à la surface de l'eau. Coalescence de deux trous noirs.

Qu'est ce qu'un trou noir ? (Région localisée de l'espace-temps de laquelle rien pas même la lumière ne peut s'échapper.)

La lumière est-elle influencée par la gravitation ? (Déviation des rayons lumineux, même en théorie newtonienne (prédit une valeur deux fois trop faible).)