

# LP05 - Lois de conservation en dynamique

Clément (de la Salle et Colléaux)

23 mai 2020

## Niveau : L1

## Bibliographie

- ↗ *La symétrie*, **Sivardière** → Chap 45 peut servir de base de leçon paraît-il
- ↗ *J'intègre MPSI*, **Salamito** → Ou n'importe quel autre bouquin de prépa pour voir comment ça y est fait
- ↗ *Mécanique du Point*, **BFR** → problème à deux corps
- ↗ Belle animation → Pour les chocs 2D
- ↗ C'te vidéo → Pour le principe d'action-réaction
- ↗ *Symétrie et invariance BUP 751* → Lourd

## Prérequis

- PFD, TEC, TMC
- Différentes coordonnées
- Énergie mécanique
- Moment cinétique d'un solide

## Expériences

- ☞ Des trucs avec la chaise tournante

## Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>1 Quantités conservées et invariances</b>	<b>2</b>
1.1 Énergie . . . . .	2
1.2 Impulsion . . . . .	3
1.3 Moment cinétique . . . . .	3
<b>2 Application : le problème à deux corps</b>	<b>4</b>
2.1 Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	5
2.2 Invariance par rotation . . . . .	6
2.3 Conservation de l'énergie . . . . .	6
2.4 Le vecteur de Runge-Lenz . . . . .	7

# Introduction

## 1 Quantités conservées et invariances

On considère dans cette partie un système dans un référentiel galiléen, et donc dans lequel s'appliquent tous les théorèmes de mécanique déjà vu : PFD, TEC et TMC. En particulier on se place dans le cas où toutes les forces sont conservatives

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = -\mathbf{grad} U(\mathbf{r}, t)$$

Enfin prenons garde de ne pas utiliser de gradient ! Dans la mesure du possible, écrire plutôt  $\frac{d}{dx}$  ou  $\frac{d}{dr}$  ou encore  $\frac{d}{dt}$ ...

### But

- L'idée de cette section est la suivante : Pour chaque grandeur conservée
- Faire le lien avec le cas d'un système isolé (en appliquant bêtement le théorème correspondant).
  - Puis montrer que, de manière plus générale, la conservation de la grandeur est due à une invariance dans le potentiel  $U$ .
  - Enfin donner quelques exemples rapides

### 1.1 Énergie

↪ J'intègre p.581

↪ Sivardière p.767

Le théorème de l'énergie cinétique nous indique que, dans le cas d'un système isolé, la variation d'énergie cinétique étant égale au travail des forces extérieures, celle-ci est nulle :

$$\Delta E_c = W = 0$$

Par contre même si le système n'est pas isolé, on peut dégager une condition pour que ce résultat reste vrai pour l'énergie mécanique

$$E_m = E_c + U$$

Il faut une **invariance temporelle** :

$$U = U(\mathbf{r}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1D}}}{=} U(x)$$

En effet on a alors

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \\ W &= \int_{x_1}^{x_2} \left( -\frac{dU}{dx} \right) dx \\ W &= - \int_{U_1}^{U_2} dU \\ W &= U_1 - U_2 \end{aligned}$$

Avec  $U_1 = U(x_1)$  et  $U_2 = U(x_2)$ . Or ce travail est égal à la variation d'énergie cinétique  $\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}$ , d'où :

$$E_m = E_{c1} + U_1 = E_{c2} + U_2 = \text{cste}$$

### Alternative

Pour plus de clarté dans le rôle de l'invariance on peut partir de  $dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt$

### Exemples

Montagnes russes : lorsque le wagon monte, il perd de l'énergie cinétique mais acquiert de l'énergie potentielle, et réciproquement lorsqu'il descend. On peut alors représenter le profil  $U(x)$ , facile c'est la même que  $z(x)$  vu que  $U = mgz$ . Ainsi l'énergie mécanique est un trait constant et l'énergie cinétique est la différence entre  $E_m$  et  $U$ . On peut ainsi facilement déterminer si le wagon aura assez d'énergie pour monter une bosse ou pas.

Dans cet exemple, l'invariance temporelle correspond au fait que le potentiel  $U(x)$  reste toujours le même dans le temps.

## 1.2 Impulsion

🚩 *Sivardière p.765*

La seconde loi de NEWTON nous indique que la quantité de mouvement d'un système isolé est toujours conservée :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{0}$$

De même, il existe un cas plus général, où même lorsque le système n'est pas isolé, sa quantité de mouvement reste constante. Il s'agit du cas de l'**invariance par translation** :

$$U = U(t)$$

Donc la force est bien nulle (gradient nul). Dans un cas plus général à 3 dimensions, l'invariance dans une direction n'implique qu'une force nulle dans cette même direction.

### Exemples

**Action réaction** Voir C'te vidéo, c'est le principe des fusées blablaba.

**Choc** Voir cette maaaagnifique animation, on voit que le barycentre suit une trajectoire rectiligne, caractéristique de la conservation de la quantité de mouvement.

## 1.3 Moment cinétique

De même que précédemment pour un système isolé, le théorème du moment cinétique nous indique que le moment cinétique doit être conservé dans le temps. En effet, un système isolé n'est en particulier soumis à aucun moment :

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

Comme pour l'énergie et l'impulsion, on peut faire le lien avec une invariance, à nouveau spatiale : l'**invariance par rotation**. Dans un problème avec rotation, les bonnes coordonnées sont les coordonnées sphériques :  $U = U(r, \theta, \phi, t)$  et s'il y a invariance, on a

$$U = U(r, t)$$

Ainsi la force qui s'applique est

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r = m\mathbf{a} \implies \mathbf{a} \parallel \mathbf{r}$$

Donc le moment cinétique varie comme

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

### Exemples

Pour vérifier expérimentalement la conservation du moment cinétique, on peut citer deux exemples courants :

**Patinage artistique** Le moment d'inertie d'un solide indéformable évolue en  $I \propto md^2$  avec  $m$  la masse du solide et  $d^2$  son extension par rapport à l'axe de rotation. Le moment cinétique est alors donné par

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\Omega}$$

Ainsi lorsqu'un ou une patineur-euse replie les bras,  $I$  diminue et pour conserver le moment cinétique (en particulier la norme), on observe une accélération :  $\omega$  augmente. Balancer une vidéo voilà ! Faire la manip avec une chaise tournante ? (dans ce cas porter des poids au bout des bras pour un meilleur résultat)

**Chaise et volant** Cette fois-ci, on s'intéresse à la conservation de la direction... Si on est assis sur la chaise tournante et qu'on tient une roue de vélo qu'on fait tourner selon un axe horizontal devant soi, d'inclinaison de celle-ci va déplacer le moment cinétique verticalement, et donc pour compenser cette variation, la chaise va se mettre à tourner !

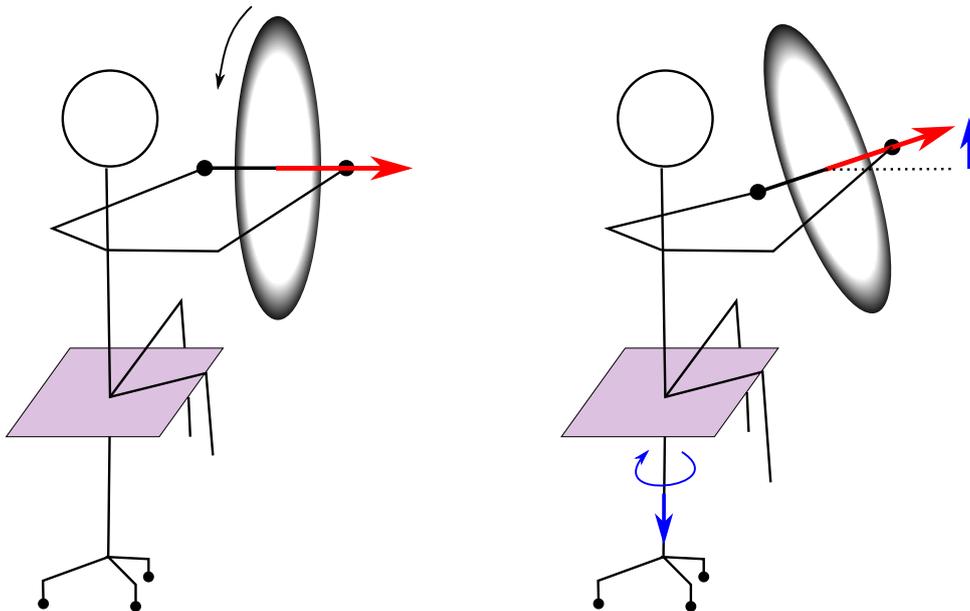


FIGURE 1.1 – Schéma de la deuxième expérience : la variation du moment cinétique (en bleu) est compensée par la rotation du tabouret.

## 2 Application : le problème à deux corps

↪ BFR

Dans toute cette deuxième partie, on va illustrer nos propos sur l'exemple d'un système de deux corps interagissant par l'interaction gravitationnelle. Le système est considéré pseudo-isolé.

Sur le schéma à faire au tableau, on pose les masses en des points  $M_1$  et  $M_2$ , l'origine en  $O$  et les vecteurs **unitaires** de 1 vers 2  $\mathbf{r}_{12}$  et de 2 vers 1  $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ . Les vecteurs  $\mathbf{OM}_1$  et  $\mathbf{OM}_2$  sont notés  $\mathbf{r}_1$

et  $\mathbf{r}_2$ . Les masses sont  $m_1$  et  $m_2$ .

La masse 1 est soumise à la seule force  $\mathbf{F}_{21}$  qui est l'attraction gravitationnelle de la seconde masse :

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{21}$$

et de même, la masse 2 est soumise à la force  $\mathbf{F}_{12}$  :

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}^2} \mathbf{r}_{12}$$

**But**

Montrer comment les invariances virent les degrés de liberté : on passe de 12 à 6 puis 2 et enfin 1 !

## 2.1 Conservation de la quantité de mouvement

♣ *BFR, p.94*

Les forces prises en compte dans ce système (bon les deux sont opposées l'une à l'autre donc en vrai y en a qu'une) dérivent d'un potentiel  $U = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r_{12}}$  qui ne dépend que de  $r_{12}$  distance entre les masses définie par  $r_{12} = |\mathbf{OM}_2 - \mathbf{OM}_1| = |\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2|$ .

Ainsi, une translation spatiale **globale** du système laisse invariant  $r_{12}$  et donc  $U$ . On peut donc utiliser la première partie pour directement obtenir la conservation de l'impulsion **globale** du système  $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{C}^{\text{ste}}$ .

Comme ça ressemble beaucoup au barycentre des masses, on va s'y intéresser : le barycentre  $G$  des masses est défini par  $(m_1 + m_2)\mathbf{OG} = m_1\mathbf{OM}_1 + m_2\mathbf{OM}_2$ . Si on dérive ça on tombe sur

$$(m_1 + m_2)\mathbf{v}_G = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

que l'on identifie avec l'expression obtenue : on a  $\mathbf{v}_G = \mathbf{C}^{\text{ste}}$ . Le centre de gravité est en translation rectiligne uniforme, le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va dans la suite se placer dans celui-ci.

On peut alors écrire dans ce référentiel :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{OM}_1 - \mathbf{OG} = (\mathbf{OM}_1 - \mathbf{OM}_2) \frac{m_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{OM}_2 - \mathbf{OG} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{12} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$

La dynamique du système s'obtient donc en étudiant celle d'un point matériel fictif situé en  $\mathbf{r}$ , on lui applique donc le PFD.

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}_{12} \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} \end{aligned}$$

$$m_2 m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = (m_1 + m_2) \mathbf{F}_{21} \quad \text{par multiplication et différence}$$

La dynamique du point fictif est donc déterminée par le PFD, en prenant une masse fictive  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  qui est la masse réduite du système. On étudie donc une masse  $\mu$  fictive soumise à un potentiel  $U = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$ . On pourra alors en déduire toute la physique du système.

### OdG

Montrer que pour Terre-Soleil on a le barycentre tout près du Soleil.

| On a maintenant posé le problème, dans un référentiel galiléen, avec un potentiel  $U(r)$ , on peut donc continuer avec les quantités conservées

## 2.2 Invariance par rotation

♣ BFR, p.23

Le potentiel  $U(r)$  que l'on vient de définir est radial, il y a donc invariance par rotation. Et qui dit invariance par rotation dit conservation du moment cinétique  $\mathbf{L}$  :D

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mu \mathbf{v} = \mathbf{C}^{ste}$$

Le vecteur  $\mathbf{L}$  est constant, or à tout instant  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  est dans le plan orthogonal à  $\mathbf{L}$ , donc le mouvement est plan.

Une autre conséquence :  $\|\mathbf{L}\| = \mu r^2 \dot{\theta}$  est une constante noté  $\mu C$  avec  $C = r^2 \dot{\theta}$ . Or l'aire balayée par le point est :  $dA = \frac{\|\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt\|}{2}$  donc

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\|\mathcal{L}\|}{2\mu} = C^{ste} = \frac{C}{2}$$

On retrouve la deuxième loi de Kepler : pour le système Terre-Soleil, le rayon issu du Soleil balaye des aires égales pendant des temps égaux (loi des aires) ♣ BFR, p.115 , ♣ LP02

| On a utilisé deux invariances, les deux spatiales, il ne reste plus que l'invariance temporelle !

## 2.3 Conservation de l'énergie

♣ Salamoto, p. 772

Encore une fois, on utilise la partie 1 : invariance temporelle  $\rightarrow$  conservation de l'énergie du système !

Comme on a montré qu'on pouvait écrire le problème à deux niveaux comme le problème d'une particule représentée par  $\mu$  et  $\mathbf{r}$ , l'énergie mécanique totale du système  $\mathcal{E}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 + U(r) \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{Gm_1 m_2}{r} \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \left[ \frac{1}{2} \mu \frac{C}{r^2} - \frac{Gm_1 m_2}{r} \right] \\ \mathcal{E} &= \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}}(r) \end{aligned}$$

où  $E_{p\text{ eff}}(r)$  représente l'énergie potentielle effective à laquelle est soumise la particule. Cette énergie (comme tout le problème maintenant) ne dépend plus que de  $r$ , la dépendance en  $\theta$  a disparu dans la constante des aires. On a donc maintenant un problème 1D, bien plus facile à étudier.

Et maintenant on envoie ! Pour les états liés/ diffusifs cf [☛ LP02](#) , [☛ n'importe quel bouquin de Prépa qui se respecte](#) , [☛ le programme Python](#) ..

| Il y a une dernière info que l'on a pas encore utilisé, c'est la forme du potentiel en  $1/r$ .

## 2.4 Le vecteur de Runge-Lenz

[☛ Sivardière, p.805](#)

[☛ Wiki](#)

[☛ BFR, p.116](#)

On a un vecteur :  $\mathbf{R} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - Gm_1m_2\mathbf{e}_r$ , appelé vecteur de Laplace-Runge-Lenz.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{L} + \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{L}}{dt} - Gm_1m_2\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ &= -G\frac{1}{\mu} \frac{m_1m_2}{r^2} \mathbf{e}_r \times \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z - Gm_1m_2\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \\ &= Gm_1m_2\mathbf{e}_\theta \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta - Gm_1m_2\mathbf{e}_\theta \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \\ \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Le vecteur de Runge-Lenz est bien une quantité conservée <sup>2</sup>. Pourquoi utiliser ce vecteur ? Il permet d'obtenir rapidement l'expression de la trajectoire. On choisi le grand axe comme axe de référence pour les angles.

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} &= Ar \cos \theta = \mathbf{v} \times \mathbf{L} \cdot r\mathbf{e}_r - Gm_1m_2r \\ &= r\dot{\theta}Lr - Gm_1m_2r \\ &= \mu C^2 - Gm_1m_2r\end{aligned}$$

On peut alors écrire l'équation de la trajectoire :

$$r = \frac{r_0}{1 + e \cos \theta} \text{ avec } r_0 = \frac{c^\epsilon}{Gm_1m_2} \text{ et } e = \frac{A}{Gm_1m_2}$$

On peut le tracer pour différents cas (programme Python) :

- $e = 0$  cercle de rayon  $r_0$
- $e < 1$  ellipse
- $e = 1$  parabole
- $e > 1$  hyperbole

On peut d'ailleurs montrer que  $E_m = G\frac{m_1m_2}{2\mu}(e^2 - 1)$ . Pour  $E_m < 0$ , on a une trajectoire non seulement bornée, mais surtout fermée ! Là on peut donner des OdG : [☛ Salamito p.767](#) .

### Le fameux groupe $SO_4$

Cette invariance est associée à une symétrie  $SO(4)$ , qui fait que des trajectoires fermées existent. Runge-Lenz est aussi conservée en MQ, et est à l'origine des règles de Klechkowski.

## Conclusion

On a donc vu que les lois de conservation en dynamique sont des conséquences de symétries. Cette propriété est un résultat général. Ces lois de conservation possèdent un grand intérêt car elle permettent de dériver facilement les équations du mouvement en connaissant l'énergie par exemple. On l'a montré dans le cas du problème de la gravitation à deux corps. La conservation de la quantité de mouvement, nous permet de nous placer dans le référentiel barycentrique galiléen, la conservation du moment cinétique nous donne la loi des aires, et en l'utilisant dans la conservation de l'énergie, on se ramène à un simple problème à une dimension. Finalement : le moment cinétique fixe le plan de l'orbitale et le paramètre  $r_0$  de la trajectoire, la conservation du vecteur de Runge-Lenz fixe la direction du périhélie et l'excentricité de la trajectoire. La trajectoire a été déterminée sans résoudre aucune équation différentielle. Ces lois de conservations sont encore plus importantes dans des problèmes où l'on ne connaît pas exactement la nature des forces mises en jeu, on peut citer notamment le cas des chocs, ou la diffusion Compton ↗ *Cagnac* , ↗ *BFR, p.198* pour Rutherford

## Questions

Qu'entendez-vous par espace isotrope ? De quelle façon peut-on traiter des systèmes non conservatifs en les rendant conservatifs ? Pourquoi avoir proposé le vecteur de Runge-Lenz, quelle est son utilité en mécanique quantique (cf Aslangul) ? Un autre correcteur m'a posé des questions simples comme lier la courbe d'énergie potentielle effective à la trajectoire d'un astéroïde en état libre (situer le périhélie). Puis une ouverture sur les états libre et liés en MQ.

Pour la Terre autour du Soleil, est-ce qu'il y a des grandeurs conservées autres que le moment cinétique et l'énergie ? Pour le pendule pesant : quelle est la propriété fondamentale qui permet la conservation de l'énergie ? J'ai fait le choc frontal avec les billes : est-ce qu'on peut toujours résoudre le problème des chocs, même en 2D ou 3D ? Traiter plutôt l'effet Compton

Quand peut-on dire d'un objet qu'il est à l'équilibre ? Quand le moment cinétique se conserve-t-il ? Les lois de conservations permettent-elles de déterminer les vitesses des objets après le choc ? À une, deux, trois dimensions ?

Quelques questions sur les coniques, sur l'allure des énergies potentielles effectives en général et sur les trajectoires : à quelles conditions sont-elles elliptiques ? fermées ?

Invariance par translation temporelle  $\implies$  énergie totale conservée  $E_m$

Invariance par translation spatiale  $\implies$  impulsion conservée  $p_x$  (dans la direction de l'invariance)

Invariance par rotation  $\implies$  conservation du moment cinétique  $\mathbf{L}$

### Définition : Grandeur conservée

Une grandeur est dite **conservée** si elle reste constante au cours de l'évolution temporelle.

Justifier de faire ce cours avant la gravitation ? Quel message retenir de la leçon ? Pourquoi

**c'est utile ?**

Résultats sans trop de calculs et pour plus tard c'est des résultats fondamentaux

**Et choc inélastique ?**

Dissipations internes mais ça remet pas en cause la conservation de  $\sqrt{\quad}$ , y a juste plus conservation de  $E$

**Et pour l'élastique comment tu justifies que t'es invariant en translation ?**

C'est plus pseudo-isolé mais c'est aussi paysage énergétique de  $U$

**Y a plus invariance par rotation quand le gars étire les bras. Un exemple de la vraie invariance qui fait la conservation ?**

Le problème à deux corps

**Et tout pareil si les systèmes sont déformables ?**

Les implications restent vraies, la chaise c'est déformable justement. Dans le TMC y aurait aussi la dérivée du moment d'inertie

**Vraiment pseudo-isolé ?**

Pas vraiment vraiment

**Des conséquences des autres forces de gravitation ?**

Bah oui, solutions plus elliptiques

**Intuiter la symétrie  $SO_4$**

**Comment t'as défini la force conservative**

**Autres exemples de trajectoires fermées ?**

Théorème de Bertrand

**Tu diminues les degrés de liberté ! cf correction de 2016**

**Des OdG ? Exemple de Terre Soleil, pour montrer que le barycentre est dans le soleil**