LP08 - Notion de viscosité, écoulement visqueux

Clément DE LA SALLE

4 mai 2020

Niveau : L2

Bibliographie

✍ **Hydrodynamique physique, 3^e édition**, Guyon

✍ Jolidon

✍ **Une introduction à la dynamique des fluides**, Rieutord

Prérequis

➢ Théorie cinétique des gaz

➢ Écoulement parfait (équation d'EULER)

➢ Équations aux dérivées partielles

➢ Équations de diffusion

Expériences

☕ Expérience de STOCKES

Table des matières

Introduction

On suppose que le cours sur les écoulements parfaits a déjà été fait... Ce n'est pas l'ordre attendu en prépa, mais ici l'équation d'Euler nous sera d'une aide infinie pour aller directement à l'essentielle sans avoir à redéfinir tout le cadre d'étude de la dynamique des fluides. En plus cette approche présente un avantage : historiquement, Navier (1823) et Stockes (forme définitive 1845) enrichissent l'équation d'Euler (1757).

Dernièrement, on a établi l'équation d'Euler, et le formalisme de la dynamique des fluides :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\,)\mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad}\, p + \mathbf{f}$$

Mais ceci ne rend pas bien compte de la réalité : seul la masse volumique est un paramètre du fluide, alors qu'on sent bien que le mouvement du miel est très différent de celui de l'eau (masses volumiques comparables)... Il nous faut un nouvel outil dont on a une bonne intuition quotidienne : la **viscosité**.

Manip' : Motivation

Faire couler différent liquide d'une burette (eau vs. glycérol) et constater que c'est pas pareil ohlala.

Ou alors montrer cette vidéo :
`https://youtu.be/1UWp3uIm5yA`

1 Viscosité et forces visqueuses

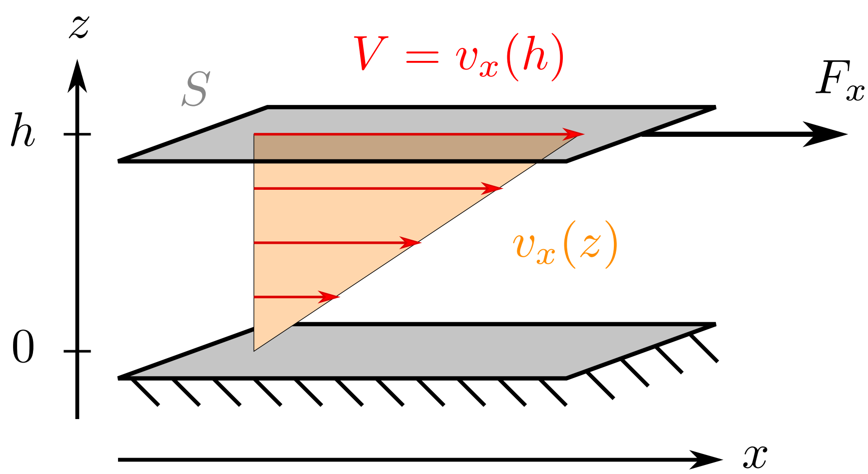
1.1 Nécessité empirique : description macroscopique

But

Vraiment faire comprendre la notion à l'aide du transport de quantité de mouvement

✍ *Guyon, p.64*

Puisque la notion de viscosité nous fait penser à une forme de résistance, il est naturel de s'intéresser à la relation entre la force qu'on exerce sur le fluide et la vitesse de celui-ci...



On considère l'expérience de COUETTE (qu'on ne réalisera pas, car il est difficile de voir directement le champ des vitesses)... On dispose d'un fluide contenant entre deux plans $z = 0$ et $z = h$, on tire sur le plan du dessus avec une force surfacique F_x/S dans la direction x de sorte à imposer une vitesse V dans cette direction.

On peut montrer empiriquement, que le déplacement de la couche de fluide supérieure, va entraîner les couches inférieure et on obtient un profil de vitesse linéaire :

$$v_x(z) = \frac{V}{h} z$$

Définition : Fluide newtonien et viscosité dynamique

On appelle **fluide newtonien** un fluide, réagissant linéairement à une contrainte :

$$\frac{F_x}{S} = \eta \frac{V}{h} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Où η est appelé **viscosité dynamique**, c'est le paramètre qui quantifie la résistance du fluide face à la contrainte. Elle s'exprime en $\mathrm{Ps} = \mathrm{Pa} \cdot \mathrm{s}$

Remarques

— La force surfacique F/S est appelée **contrainte de cisaillement** et est homogène à une pression... Contrairement à la pression, elle ne s'applique pas orthogonalement à la surface considérée, mais tangentiellement !

— On peut généraliser la forme de cette force surfacique dans le fluide : la force surfacique qu'exerce la partie supérieure sur la partie inférieure est

$$\frac{F_x(z)}{S} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z)$$

Cette forme se comprend bien intuitivement : plus le gradient de v_x est élevé, plus les couches se freinent entre elles et donc plus il faudra une force importante pour les déplacer.

— Plus la viscosité dynamique est grande, plus il faudra exercer une force importante pour déplacer les couches de fluide.

OG

À 20°C
Air $\eta = 1.8 \cdot 10^{-5}$ Pa · s

Eau $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ Pa · s

Glycérine $\eta = 1.5$ Pa · s

Miel $\eta = 10\ 2000$Pa · s
À rechercher pour le miel...

> *Tout ça est construit à partir de l'intuition et de l'expérience, mais comment retrouver ce résultat avec un modèle simple ?*

1.2 Origine microscopique (dans les gaz)

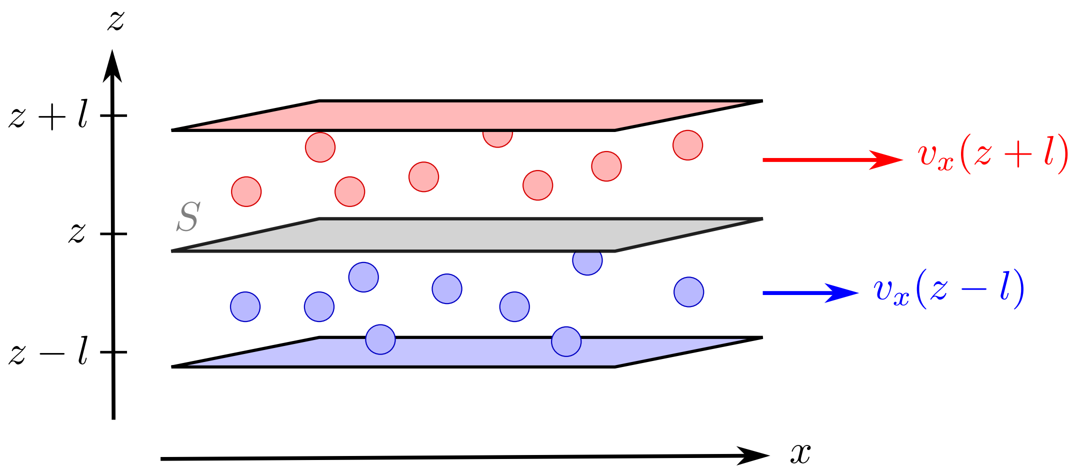
✍ *Guyon, p.68*

On se restreint à l'étude des gaz, le modèle présenté ne s'applique absolument pas aux liquides... Pour plus d'infos sur les liquides : ✍ *Guyon, p.68*

Il s'agit d'un modèle de théorie cinétique des gaz dont les hypothèses sont les suivantes :

Hypothèses

1. Les atomes se déplacent librement : ils ne subissent que des chocs
2. La distribution de leur vitesse est isotrope de sorte que 1/6 des atomes vont à $+u\vec{e_x}$, 1/6 vont à $-u\vec{e_x}$ et de même dans les autres directions. La vitesse des atomes u est la vitesse thermique telle que
$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}m < \mathbf{v}^2 >= \frac{1}{2}k_BT$$
3. On note l le libre parcourt moyen et dt le temps que mettent les atomes à parcourir l
$$l = u\mathrm{d}t$$
4. Les atomes ont en plus de u, une vitesse globale notée $v_x(z)$, bien plus faible, mais qui détermine le mouvement macroscopique du fluide
5. La température est homogène
6. La densité d'atome n est homogène
7. Les atomes ont tous la même masse m



On considère alors une section S de fluide à la hauteur z et on s'intéresse comme dans la partie précédente à la force exercée par la partie supérieure sur la partie inférieure. Cette force est due au mouvement des atomes rouges (compris entre z et $z+l$) qui, pendant dt, peuvent taper dans les atomes bleus (compris entre $z-l$ et z).

— Les atomes rouges ont une quantité de mouvement selon x

$$p_x(z+l) = \frac{1}{6} nuS\mathrm{d}t\, mv_x(z+l)$$

- $uS\mathrm{d}t$ est la volume occupé par les atomes rouges (ceux qui vont se cogner pendant dt
- $\frac{1}{6}nuS\mathrm{d}t$ est le nombre d'atomes rouges
- $mv_x(z+l)$ est la quantité de mouvement d'un atome rouge (on ne prend pas en compte la vitesse d'agitation thermique car en moyenne elle est nulle)

— Les atomes bleus ont une quantité de mouvement

$$p_x(z-l) = \frac{1}{6} nuS\mathrm{d}t mv_x(z-l)$$

Ainsi les atomes rouges exercent sur les bleus une force selon x égale à

$$F_x = \frac{\mathrm{d}p_x(z+l)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}p_x(z-l)}{\mathrm{d}t}$$
$$F_x = \frac{1}{3} nuSl\, m\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

Or on a définit la viscosité dynamique η de sorte que

$$F_x = \eta\frac{\partial v_x}{\partial z}S$$

Ce qui donne finalement que

$$\boxed{\eta = \frac{1}{3} nulm}$$

Remarques

— On trouve pour les gaz que $\eta \propto \sqrt{T}$, alors que pour les liquides, η décroit avec T !

— On pourrait croire que cette viscosité dépend de la densité, donc de la pression (ce qui en ferait une grandeur moins caractéristique d'un fluide), mais en fait $nl \sim 1/\sigma$ où σ est la section efficace des atomes... Ouf !

OG

Pour l'air dans les conditions standard de pression et de température, on a $u \sim 500\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ et $l \sim 70\,\mathrm{nm}$ donc on trouve bien $\eta \sim 10^{-5}\,\mathrm{Pa s}\cdot\mathrm{s}$

2 Mise en équation

2.1 De la force surfacique à la force volumique

Dans le but d'intégrer cette nouvelle force aux équations d'un fluide, il faut la mettre sous forme de force volumique et non pas surfacique... Considérons une tranche dz de fluide, et faisons un bilan des forces visqueuses :

En $z + \mathrm{d}z$ la tranche subit la force de cisaillement exercée par la partie supérieure (signe +) dans notre convention :

$$F_x(z + \mathrm{d}z) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z + \mathrm{d}z)S$$

En z la tranche subit la force de cisaillement exercée par la partie supérieure (signe +) dans notre convention :

$$-F_x(z) = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z}(z)S$$

Donc cette tranche subit au total une force

$$\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}(z)S\mathrm{d}z$$

Et comme sont volume est $S\mathrm{d}z$, la force volumique associée à la viscosité est

$$f_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Et de façon plus générale, lorsque l'on prend en compte plus de dimensions,

$$\mathbf{f} = \eta \Delta \mathbf{v}$$

Rappelons que cette force n'est valable QUE pour les **fluides Newtoniens**.

Grâce à tout ça, on va pouvoir mettre notre plan à exécution Niarf Niarf

2.2 Équation de Navier-Stockes (NS)

On a vu la dernière fois l'équation d'Euler :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}\,)\mathbf{v} \right) = -\mathbf{grad}\, p + \mathbf{f_v}$$

Cette équation prend en compte toute les forces volumiques $\mathbf{f_v}$, et bien on vient de montrer qu'il existait parmi ces forces, systématiquement une force visqueuse, ce qui nous amène à écrire l'équation de Navier-Stockes :

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,)\mathbf{v}\right) = -\mathbf{grad}\,p + \eta\Delta\mathbf{v} + \mathbf{f_v}$$

Dans un référentiel galiléen.

Alors $\mathbf{f_v}$ représentent toutes les autres forces volumiques (par exemple la gravité $\rho\mathbf{g}$).

Bilan inconnues / équations

On a quatre inconnues $\mathbf{v}$ et P pour trois équations. Il faut donc ajouter une équation pour résoudre ce système, par exemple avec l'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement :

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$$

Attention en vrai cette hypothèse est déjà faite pour écrire NS ! Normalement y a un terme qui contient $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ avec la seconde viscosité...

Pour les gaz, qui ne sont pas des fluides incompressibles, on fait souvent l'hypothèse d'un écoulement incompressible... Mais alors ρ devient une variable ! Donc la dernière équation à ajouter est la conservation de la masse.

Conditions aux limites

La vitesse du fluide doit être égale à celle du solide à l'interface. Pour un écoulement parfait, on n'avait que la condition normale. Il faut également avoir continuité de la pression, ou loi de Laplace (mettre en pré-requis si on veut dire cette phrase !).

2.3 Nombre de Reynolds et écoulement visqueux

Le but est à présent de simplifier cette équation en retirant le terme non linéaire... Comparons son influence celle du terme visqueux :

Définition : Nombre de Reynolds

On pose un nombre sans dimension, qui compare les termes convectif et diffusif (visqueux)

$$\mathrm{Re} = \frac{||\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,)\mathbf{v}||}{||\eta\Delta\mathbf{v}||} = \frac{\rho V L}{\eta}$$

Remarques

— Le nombre de Reynolds compare les termes de convection et de diffusion (viscosité) : s'il est grand, on pourra négliger les forces visqueuses mais s'il est petit, c'est plutôt le terme convectif qui sera négligé !

— Le nombre de Reynolds est propre à l'écoulement... Pas au fluide !

Définition : Viscosité cinématique

On peut regrouper les termes propre au fluide η et ρ dans un coefficient appelé **viscosité cinématique** :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

Elle est homogène à un coefficient de diffusion ($\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)

OG

Situation	ρ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)	V ($\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)	L (m)	η ($\mathrm{Pa \cdot s}$)	Re
Voiture dans l'air	1	10	1	10^{-5}	10^{6}
Moustique dans l'air	1	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	1
Cellule dans l'eau	10^{3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-3}	10^{-3}

Selon la deuxième remarque, on est amenés à distinguer deux cas :

Re $\gg 1$ Les forces visqueuses sont négligeables devant le terme convectif

Re $\ll 1$ Les forces visqueuses dominent et on peut alors négliger le terme convectif

Dans le premier cas, on retrouve l'équation d'Euler d'un fluide parfait... C'est donc plutôt le second cas qui nous intéresse ! Si on se place à bas Reynolds, l'équation perd son terme non linéaire !

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad}\, p + \eta \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f_v}$$

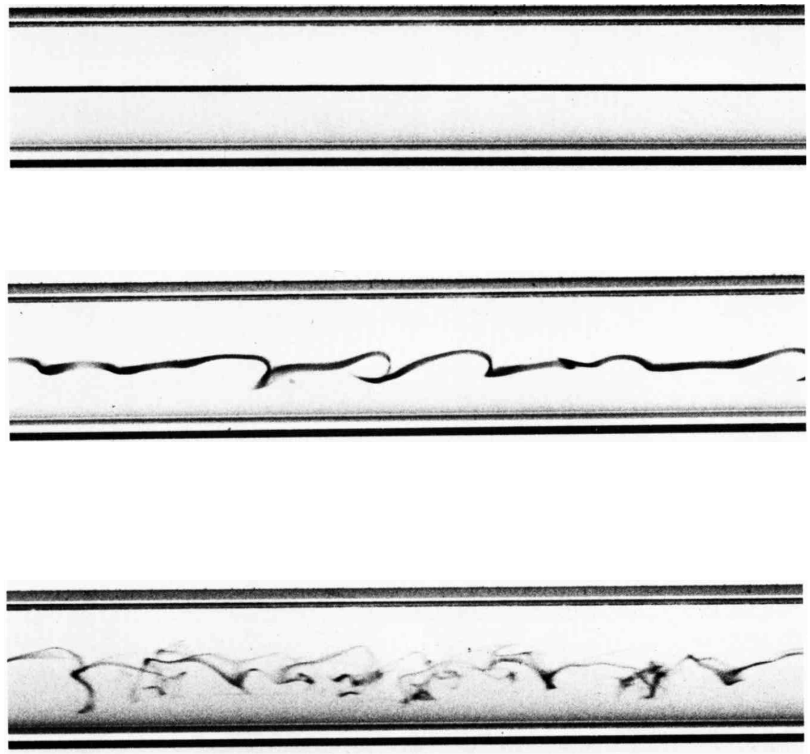


FIGURE 2.1 – Des écoulements à différents nombre de REYNOLDS. Extrait de *An album of fluid motion* de **Van Dyke**.

On écrit souvent cette équation en régime stationnaire, à bas REYNOLDS et sans force extérieure... C'est l'**équation de STOCKES** :

$$\mathbf{grad}\, P = \eta \Delta \mathbf{v}$$

3 Propriétés des écoulements visqueux

3.1 Diffusion de quantité de mouvement

Puisque ν est homogène à un coefficient de diffusion, quelle grandeur pourrait être diffusée ?... Selon les observations macroscopique et microscopique du début, on est amenés à penser que c'est la **quantité de mouvement** qui est diffusée !

En effet, si on oublie le terme de pression et qu'on se place à ρ homogène et constant, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = \nu \Delta(\rho \mathbf{v})$$

On reconnait alors une équation de diffusion où la grandeur diffusée est la quantité de mouvement volumique $\rho \mathbf{v}$

Remarque

La quantité de mouvement diffuse également dans les directions orthogonales à la vitesse du fluide.

3.2 Renversabilité

Ne pas forcément présenter mais bon à savoir faire : ✍ *Jolidon, p.411*

Manip' : Expérience de Stockes

C'est joli ça revient en arrière ! Ou sinon montrer cette vidéo : `https://youtu.be/k7ZZtxdtmeQ`

3.3 Aspects énergétiques

S'il y a diffusion, il doit y avoir de la dissipation quelque part... Allons voir ça !

Reprenons l'exemple de l'écoulement de Couette faisons le bilan des forces qui s'appliquent sur un élément de volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$:

- Force de pression à gauche : $P(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- Force de pression à droite : $-P(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- Force de cisaillement en haut : $\eta\frac{\partial v_x}{\partial z}(z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
- Force de cisaillement en bas : $-\eta\frac{\partial v_x}{\partial z}(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

À chacune de ces forces, on peut associer une puissance :

- $v_x(z)P(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- $-v_x(z)P(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
- $\eta v_x(z+\mathrm{d}z)\frac{\partial v_x}{\partial z}(z+\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$
- $-\eta v_x(z)\frac{\partial v_x}{\partial z}(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

Donc la puissance volumique des forces extérieures est

$$\mathcal{P}_{ext} = -v_x\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} + \eta\frac{\partial}{\partial z}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

Mais avec l'équation précédemment établie, en supposant qu'on est en régime stationnaire, on a

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Donc

$$\mathcal{P}_{ext} = -\eta v_x\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \eta\frac{\partial}{\partial z}\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) = \eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2$$

Or en régime stationnaire, la puissance cinétique est nulle... On a donc que la puissance **volumique** des forces intérieures est

$$\mathcal{P}_{int} = -\mathcal{P}_{ext} = -\eta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2$$

Remarques

— Ce terme est négatif car les forces visqueuses dissipent toujours de l'énergie

— Il y a deux moyens de beaucoup perdre de l'énergie :

- Lorsque la viscosité est grande
- Lorsque le gradient de vitesse est grand... Dans les écoulements turbulents, il existe des zones de grands frottements, endroits où l'énergie se perd dans la friction de particules de fluide.

3.4 Écoulement de Poiseuille

✍ *Rieutord, p.129*

Traitons un exemple simple pour bien comprendre... Blablabla Poiseuille il voulait étudier le sang dans les vaisseaux sanguins.
`http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/physique-animee-poiseuille.xml`

On peut dire que dans l'expérience de Couette plan, le déplacement de la plaque créer un gradient de pression selon x et donc on a un écoulement de Poiseuille qui vient se superposer. Donc plutôt faire Poiseuille plan et pas cylindrique.

Conclusion

Questions

★ Une idées des viscosité des huiles de moteur montrées en vidéo introductive ?

De l'ordre du millier pour les plus visqueux

★ Les hypothèses de Couette plan ?

Écoulement incompressible en régime stationnaire, à bas Reynolds *et fluide newtonien*

★ Différence entre un fluide incompressible et un écoulement incompressible ?

Pour le fluide incompressible, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ *mais un écoulement incompressible* $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

★ Tu connais des fluides avec des viscosités beaucoup plus grandes ?

Expérience de la poix vers le $10^{11}\,\mathrm{Pa\cdot s}$ *: lancée dans les années en 1927 et première goutte tombée récemment vers les années 2010 (poix = goudron c'est strictement la même chose)*

★ C'est quoi la poix ?

★ C'est quoi ton système pour établir la force volumique ?

Une particule de fluide

★ T'as dit que la diffusion de quantité de mouvement c'était quand on s'intéressait à ce qu'il se passait macroscopiquement...

L'idée c'était de dire que ça se voit macroscopiquement, même si effectivement c'est l'excitation thermique qui en est à l'origine

★ La force surfacique ça a un nom pour les fluides newtonien, tu le connais ?

Force de NEWTON

★ C'est quoi une vitesse lagrangienne ? Ton équation, tu l'établie en vision eulérienne ou lagrangienne ? Quand est-ce qu'on utilise la vision lagrangienne ?

Eulérienne

★ Différence entre trajectoire et ligne de courant

★ C'est important d'avoir div $\mathbf{v}$ pour écrire l'équation de NS ?

En vrai ouais, ça rajoute un terme dans l'équation sinon

★ Ton équation comme ça, tu peux l'appliquer à un gaz ? Comment est-ce qu'on ferait pour décrire l'écoulement pour un gaz ?

Il vaut combien le nombre de REYNOLDS *critique ? Pour* POISEUILLE *c'est plutôt 2000 mais pour* COUETTE *plan c'est plutôt 100*

★ Elle vient d'où l'équation de STOCKES ?

Bas nombre de REYNOLDS *pour négliger l'advection et régime stationnaire et sans autre force volumique que la viscosité*

★ Tu peux évaluer le profil de pression dans un écoulement de COUETTE plan ?

★ Comment faire pour enlever la gravité ?

On se place dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{g}$

★ Le sang c'est un fluide newtonien ?

En bonne approx ouais, mais sinon plutôt à tendance rhéfluidifiante

★ Y a quoi comme autres fluides ?

Les rhéofluidifiants, rhéoépaississants (comme la maizena), fluides à seuil etc.

★ Comment on mesure la viscosité d'un fluide ? Tu connais des noms de viscosimètres ?

À bille, écoulement de COUETTE *cylindrique*

★ C'est quoi la formule de la couche limite ? Dans quels autres domaines en physique on a ce phénomène de couche limite ?

Dans les équations de diffusion (épaisseur de peau)

★ On a vraiment égalité des vitesses normales pour les conditions aux limites ?

Commentaires

— Bien mettre équations de pré-requis les équations de diffusion
— Peut être bien de donner la force surfacique avec des vecteurs aussi
— Bien définir les systèmes considérés, les hypothèses
— Ça peut être plus intéressant de partir de NS puis de dire ce qu'on néglige avec les hypothèses que directement de l'équation de STOCKES
— Ce qu'il faut mettre sur les slides c'est des schémas compliqués ou des trucs lourds à écrire (donc écrire l'établissement du nombre de REYNOLDS au tableau !)