

LP18 - Phénomènes de transport

Cléments COLLÉAUX et DE LA SALLE

19 mai 2020

Niveau : L2

Bibliographie

- ↗ *Thermo*, **Perez** →
- ↗ *Introduction to the physic of electrons in solids*, **Al-loul** → Modèle microscopique
- ↗ *Physique des solides*, **Aschcroft** → Aussi le modèle micro *

Prérequis

➤

Expériences

☞

Table des matières

Table des matières	1
1 Généralités sur le transport	2
1.1 Cadre de l'étude	2
1.2 Vecteur densité de courant	3
1.3 Équation de conservation locale	3
2 Diffusion	5
2.1 Loi de Fick	5
2.2 Analogies	7
2.3 Modèle microscopique	8
3 Compétition convection/diffusion	10
3.1 Nombre de PÉCLET	10
3.2 Cas d'un équilibre diffusion / convection	11
4 Questions	11

Utilisation de l'outil informatique

Dans le cadre de cette leçon, nous sommes amenés à discuter des solutions de l'équation de diffusion pour discuter de leur sens physique. Ceci est très important dans la leçon car l'équation de diffusion est omniprésente et la forme de ses solutions rend compte de nombreux phénomènes : étalement d'une tache de colorant, ralentissement de la vitesse de la diffusion dans le temps, rôle du coefficient de diffusion..

Pour que ceci soit plus visible pour des élèves, j'ai préparé une animation Python (p. 6) qui représente l'évolution temporelle d'une solution de l'équation de diffusion de particules avec comme condition initiale un Dirac de concentration en 0. Sur l'animation, on voit bien l'étalement de la tache, le ralentissement de la diffusion et on peut faire varier D pour voir son impact.

L'outil informatique trouve ainsi tout son intérêt en rendant visible des propriétés mathématiques abstraites, ce qui permet aux élèves de s'en souvenir avec beaucoup plus de facilité. Cela souligne son fort potentiel pédagogique.

Introduction

Dans les cours de thermo que vous avez déjà eus, on vous a toujours répété que vous bossiez sur des systèmes à l'équilibre. On va aujourd'hui s'intéresser à l'évolution du système pour rejoindre cet état d'équilibre et les phénomènes de transport en font partie. Il s'agit d'une quantité physique qui se conserve et se déplace dans le temps. Nous allons donc étudier plusieurs exemples de tels phénomènes et définir dans un premier temps l'équation de conservation locale.

1 Généralités sur le transport

1.1 Cadre de l'étude

Commençons par énoncer une hypothèse nécessaire pour cette leçon : **l'équilibre thermodynamique local** et illustrons-le sur un exemple de la vie quotidienne (ça devrait faire plaisir au jury).

Disons que le matin de mon oral j'ai pris un café en mettant un sucre. J'aimerais bien définir une densité volumique de particules de sucre dans le café mais au niveau macroscopique ça n'a pas de sens, celle-ci c'est pas homogène à notre échelle. C'est là qu'intervient l'hypothèse d'équilibre thermodynamique local :

Définition : Équilibre thermodynamique local

Tout système macroscopique (doit contenir un nombre suffisant de particules pour être un système thermo) infinitésimal est à l'équilibre thermodynamique. Cela revient aux systèmes mésoscopiques du système global ($\simeq 1 \mu\text{m}^3$).

Ça peut paraître évident mais c'est bien de le préciser !

Ainsi, avec cette hypothèse, on peut définir en chaque point du milieu, soit *localement*, une température, une concentration, une pression...

Ce qui est caché dans cette hypothèse, c'est qu'il faut que le temps de rétablissement de l'équilibre du système soit négligeable devant les temps de transport des grandeurs.

Grandeurs, grandeurs.. mais quelles grandeurs ? Nous ne traiterons ici que de **grandeurs conservées** :

Définition : Grandeur conservée

Grandeur extensive qui ne peut apparaître ou disparaître spontanément : si la valeur d'une grandeur conservée vient à varier dans un système c'est qu'un apport/retrait de cette grandeur est intervenu depuis l'extérieur. Exemples : masse, énergie, charge électrique...

Mais pourquoi ces grandeurs en particulier ?

Les quantités conservées ne sont pas modifiées par les collisions microscopiques car celles-ci préservent le nombre de particule, l'énergie, la charge... L'équilibre global ne peut être atteint que par transport d'une quantité conservée, d'un point à un autre. L'équilibre d'une quantité qui n'est pas conservée peut être rétabli localement par des collisions, sans nécessité de transport. Les phénomènes que nous allons étudier concernent donc le transport de grandeurs conservées :

- diffusion de matière (de particules), nous allons mener les calculs avec cet exemple
- transfert d'énergie ou diffusion de la chaleur
- transfert de charges électriques...

1.2 Vecteur densité de courant

Pour établir l'équation de conservation locale, il faut être capable d'exprimer le flux de quantité entrante dans notre système. Si on prend l'exemple du nombre de particules représenté par $n(\vec{r}, t)$ la densité de particules et que l'on étudie le nombre de particules dans un domaine Ω de l'espace délimité par une surface Σ , il faut être capable d'exprimer le flux de particules qui entrent et qui sortent de Ω . Le flux $d\varphi_n$ est défini comme le nombre de particules qui franchissent la surface Σ par unité de temps.

$$d\varphi_n(\vec{r}, t) \equiv \vec{j}_n(\vec{r}, t) \cdot d\vec{\Sigma}$$

cette expression permet de définir le **vecteur densité de courant** qui correspond à un flux surfacique, il s'agit ici du nombre de particules qui traversent une surface élémentaire par unité de temps.

Quelques remarques

- cette définition montre bien que le flux est algébrique : si \vec{j}_n est dans les mêmes sens et direction que $d\vec{\Sigma}$, ie orienté orthogonalement vers l'extérieur de Ω , alors on a des particules qui sortent de Ω . Dépendant du signe on parle de flux entrant/sortant.
- de la même manière, si \vec{j}_n et $d\vec{\Sigma}$ sont orthogonaux alors le flux entrant/sortant est nul, ce qu'on comprend aisément.
- cette définition est universelle et permet de définir un vecteur de densité de courant de particule \vec{j}_n , de courant de charge \vec{j}_e , de chaleur \vec{j}_Q ... Ce qui change son unité : \vec{j}_n est en mol/s/m² et \vec{j}_e est en C/s/m² = A.m⁻²

■ Armés de cette définition nous pouvons retrouver l'équation de conservation locale.

1.3 Équation de conservation locale

Considérons la situation unidimensionnelle de la figure suivante. Elle représente le cas le plus général d'un transport en présence d'un fluide.

Dans le volume dV compris entre x et $x + dx$ il n'y a ni création ni consommation de particules. On a $\vec{j} = j\vec{e}_x$. Le milieu, un fluide donc, se déplace à la vitesse v selon la direction x . On note $dN = ndV$ le nombre de particules dans le volume dV .

La variation de dN entre t et $t + dt$ s'écrit de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} dN(x + vdt, t + dt) &= dVn(x + vdt, t + dt) \\ dN(x + vdt, t + dt) &= Sdx \left(n(x, t + dt) + vdt \frac{\partial n}{\partial x}(x, t + dt) \right) \\ dN(x + vdt, t + dt) &= Sdx \left(n(x, t + dt) + vdt \frac{\partial n}{\partial x}(x, t) \right) \end{aligned}$$

Après des développements de Taylor à l'ordre 1 en dx et dt .

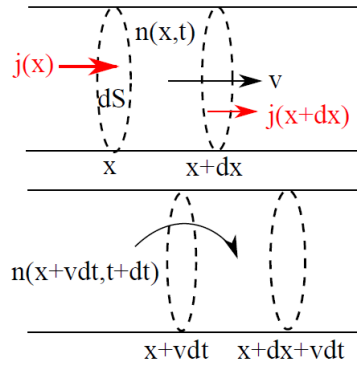


FIGURE 1.1 – Caption

Or on peut aussi écrire : "après = avant + entré en x + entré en $x + dx$ "

$$dN(x + vdt, t + dt) = dN(x, t) + S(j(x, t) - j(x + dx, t)) dt$$

$$dN(x + vdt, t + dt) = Sdx n(x, t) - S \frac{\partial j}{\partial x}(x, t) dx dt$$

En égalant ces deux expressions il vient l'équation de conservation locale en 1D et généralisée en 3D :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v_x \frac{\partial n}{\partial x} = - \frac{\partial j}{\partial x}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) n = - \text{div } \vec{j}$$

Qui se simplifie si le milieu est à l'arrêt $\frac{\partial n}{\partial t} = - \text{div } \vec{j}_n$

On s'intéresse à la variation du nombre de molécules N contenue dans le tronçon $[x, x + dx]$. On va aller un peu plus loin, en supposant que v n'est pas uniforme... Ça nous permettra de trouver un joli résultat !

— D'une part, la variation du nombre de molécules dN s'écrit

$$dN = (\text{quantité dans } [x + v(x, t)dt, x + dx + v(x + dx, t)] \hat{\mathbf{a}} t) - (\text{quantité dans } [x, x + dx] \hat{\mathbf{a}} t)$$

$$dN = n(x + v(x, t)dt, t + dt) [(x + dx + v(x + dx, t)dt) - (x + v(x, t)dt)] S - n(x, t)(x + dx - x)S$$

$$dN = \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt + v \frac{\partial n}{\partial x} S dx dt + n \frac{\partial v}{\partial x} S dx dt$$

$$dN = \frac{\partial n}{\partial t} S dx dt + \frac{\partial}{\partial x} (nv) S dx dt$$

— D'autre part, cette variation de quantité de molécules est :

$$dN = \text{Ce qui rentre} - \text{ce qui sort}$$

$$dN = (j(x, t) - j(x + dx, t)) S dt$$

$$dN = - \frac{\partial j}{\partial x} S dx dt$$

Ainsi en identifiant les deux expressions, on obtient

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (j + nv) = 0$$

Qu'on peut aussi réécrire en 3D comme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (\mathbf{j} + n\mathbf{v}) = 0$$

Remarque

On peut aussi choisir de ne pas considérer l'advection... Faire comme en prépa pour bien expliquer "pourquoi on prend n en x et pas en $x + dx$ "... Ce qui simplifie très largement le calcul. Puis à la fin seulement, on dit que \mathbf{j} peut contenir un terme de diffusion et un terme d'advection... Le problème du coup c'est qu'on fait cette séparation après coup, alors qu'on est capable de la retrouver dans les calculs.

Remarque

Il convient de préciser que cette équation n'est pas propre au nombre de particule mais valable pour toutes les quantités conservées

Deux modes de transport

On identifie deux modes de transport de la quantité conservée :

- l'**advection** ou **convection** : elle nécessite une vitesse du milieu $\vec{v} \neq \vec{0}$: les molécules du milieu entraînent les particules étudiées, c'est l'action de touiller
- la **diffusion** a lieu même en l'absence de vitesse du milieu $\vec{v} = \vec{0}$. Comme le milieu étudié est en mouvement, \vec{j}_n ne contient que la physique de la diffusion.

On peut illustrer cette différence avec l'exemple de la casserole qui chauffe : la chaleur progresse dans le métal immobile par diffusion et la chaleur progresse dans l'eau qui bouge par convection (rouleaux de convection)

| *Nous allons nous intéresser plus particulièrement à la diffusion comme mode de transport.*

2 Diffusion

2.1 Loi de Fick

Manip' : Diffusion d'ammoniac

Dans un tube de verre fermé, on asse un fil de cuivre, sur lequel on attache des bouts de papier de phénolphthaléine (devient rose en milieu basique). On introduit alors à une des extrémité un coton imbibé d'ammoniac (attention à ne pas créer trop de mouvement d'air!), on referme le tube et se régale.

La diffusion est le mode de transport pour $\vec{v} = \vec{0}$, qui correspond à l'équation $\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div} \vec{j}_n$. Pour continuer l'étude il faut une expression concrète de \vec{j}_n . Expérimentalement, on constate un courant de particules quand il existe une inhomogénéité de la densité de particules n . On se donne alors une loi **phénoménologique** qui relie cette inhomogénéité au vecteur densité de courant de particules :

$$\vec{j}_n = -D \text{grad } n$$

C'est la loi de Fick (1855) pour le transport de particules. L'idée de FOURIER (FICK reprend cette idée pour les particules, 50 ans plus tard) c'est que chaque petit volume échange de l'énergie **proportionnellement** à la différence d'énergie avec ses voisins... Petit lien amusant avec les carrés magiques de DIRICHLET : <https://youtu.be/2oq1UDpqEGQ>

D

Le coefficient D est le **coefficient de diffusion**, homogène à $L^2 \cdot T^{-1}$. OdG tirés du [⚡ Diu, p.481](#) (on relie la dépendance en T avec l'origine de l'agitation thermique) :

		T (°C)	D (cm ² s ⁻¹)
Gaz (pression atmosphérique)	Hydrogène dans l'air	25	0,63
		400	3,24
	Vapeur d'eau dans l'air	25	0,24
		400	1,13
Liquides	Dioxyde de carbone dans l'eau	25	$1,6 \cdot 10^{-5}$
	Éthanol dans l'eau	25	$1,2 \cdot 10^{-5}$
	Éthanol dans le benzène	25	$3,0 \cdot 10^{-5}$
	Cuivre dans l'aluminium fondu	700	$7,2 \cdot 10^{-5}$
	Or dans l'argent fondu	980	$2,5 \cdot 10^{-5}$

Limites de la loi de Fick ⚡ DGLR p.478

Cette loi est phénoménologique et a été exprimée pour tenir compte d'un comportement observé linéaire avec notamment D indépendant de n . Ceci est une approximation, la loi de Fick linéaire n'est valable que pour des faibles variations de n pour être dans l'approximation linéaire. Son application nécessite de plus quelques conditions : l'équilibre thermodynamique local et p, T uniformes

En combinant la loi de Fick avec l'équation locale de conservation du nombre de particules, il vient facilement l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$$

Remarques

⚡ DGLR, p480

- pour résoudre cette équation il ne manque que des CI et CL : il faut un programme avec l'étalement de la gaussienne
- cette équation n'est pas invariante par retournement du temps $t \rightarrow -t$ contrairement à l'équation de d'Alembert, cela traduit ici un phénomène de diffusion **irréversible**, ie qui ne va pas spontanément changer de sens d'évolution. Exemple du sirop dans l'eau, qu'on peut faire en manip illustrative d'ailleurs, le sirop ne va jamais se reconcentrer en un point
- par analyse dimensionnelle avec D et t , on peut construire une longueur $\delta \sim \sqrt{Dt}$. Si la distribution de substance diffusante est initialement concentrée à l'origine, sa largeur au temps t est donnée par $\delta(t)$, proportionnelle à \sqrt{t} : la distribution s'étalement et la variation en \sqrt{t} est caractéristique de la diffusion. **OdG** : temps associé à un étalement de 1 m. Dans un milieu gazeux avec $D = 0.5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $t \sim 6$ heures alors que pour un milieu liquide avec $D = 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$, $t \sim 32$ ans ! Or, dans la vie quotidienne, les diffusions dans des liquides sont plutôt rapides (on attend pas des années pour un sucre dans le café), ce sont des mouvements hydrodynamiques d'ensemble comme les vibrations de la table qui étalent plus efficacement la tache.
- On dit pas propagation pour une équation de diffusion qui n'est donc pas une équation de propagation !

Illustration Python

On illustre l'étalement d'une tache et le ralentissement de la diffusion avec l'évolution de la solution 1D

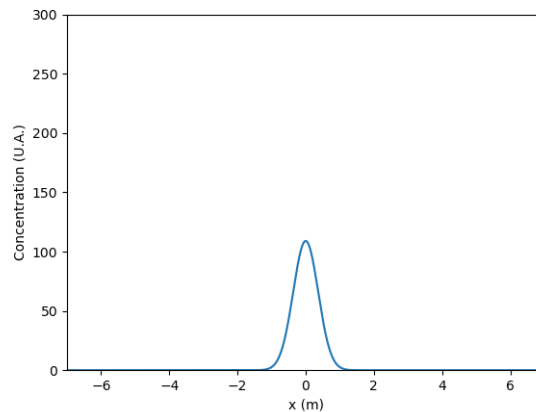


FIGURE 2.1 – Extrait de l'animation Python

On avait dit que l'équation de conservation locale s'appliquait aussi à d'autres quantités conservées que le nombre de particules comme l'énergie.. Quid alors de l'équation de diffusion ? C'est l'heure des bonnes analogies !

2.2 Analogies

	Diffusion de particules	Diffusion thermique	Diffusion de quantité de matière	Conduction électronique
Équation de conservation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_n = 0$	$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_Q = 0$	$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \text{div} \left(\frac{d\vec{F}_t}{ds} \right) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_e = 0$
Loi de réponse linéaire Loi de Fick	$\vec{j}_n = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$	$\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\text{grad}} T$ Loi de Fourier	$\frac{d\vec{F}_t}{ds} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_x$ Loi de Newton	$\vec{j}_e = -\sigma \overrightarrow{\text{grad}} V$ Loi d'Ohm
Coefficient de Transport Diffusivité	D (m ² /s)	κ (W/m/K) Conductivité thermique	η (Pa.s) Viscosité dynamique	σ (S/m) Conductivité électrique
Coefficient de diffusion	D (m ² /s)	$D_{\text{th}} = \kappa / \rho c$ (m ² /s)	$\nu = \eta / \rho$ (m ² /s)	
Équation de diffusion	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$	$\frac{\partial T}{\partial t} = D_{\text{th}} \Delta T$	$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{v}$	

Comme on peut le voir sur le tableau, si on oublie le transport convectif il y a une analogie criante entre la diffusion de particule et la diffusion thermique : [DGLR p.492](#)

- même équation de conservation locale
- même loi de réponse linéaire phénoménologique qui définit la conductivité thermique
- on a aussi une équation de diffusion (donc mêmes commentaires et solutions) qui diffèrent juste des valeurs prises par D . On peut encore faire une comparaison de temps pour s'étaler sur 10 cm : métal : 100 s vs bois 28 h (cuillère en bois)

Une différence notable tout de même entre ces deux diffusions : pour le nombre de particules, l'équation de diffusion portait sur la densité volumique (donc intensive) d'une grandeur extensive (le nombre de particules) alors que pour la chaleur l'équation de diffusion porte sur une variable intrinsèquement intensive (T), grandeur conjuguée d'un variable primitive extensive (E).

Matériau	D_{th} ($\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$)	κ ($\text{W cm}^{-1} \text{K}^{-1}$)
Air	0,23	$0,26 \times 10^{-3}$
Eau (0°C)	$0,15 \times 10^{-2}$	$0,56 \times 10^{-2}$
Glace	$1,3 \times 10^{-2}$	$2,2 \times 10^{-2}$
Argent	1,72	4,18
Cuivre	1,2	4,1
Aluminium	0,97	2,4
Fer	0,23	0,8
Acier inoxydable	0,03 à 0,05	0,15 à 0,6
Verres	$(0,25 \text{ à } 1) \times 10^{-2}$	$(0,7 \text{ à } 1,3) \times 10^{-2}$
Polymères	$\sim 10^{-3}$	$\sim 0,3 \times 10^{-3}$
Bois	$(1 \text{ à } 2) \times 10^{-3}$	$(0,05 \text{ à } 0,25) \times 10^{-2}$

Il y a aussi une grosse analogie avec la diffusion de quantité de mouvement due à la viscosité et à l'équation de Stokes, qui est directement une équation de diffusion.

Cas de la conduction électrique

Le cas de la conduction électrique est complexe et mérite de s'y attarder. Revenons à l'équation de conservation globale $\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(\vec{j} + n\vec{v}) = 0$

Oublions tout de suite la convection, qui correspondrait ici à de la Magnéto-Hydro-Dynamique où le fluide en mouvement emporte les charges. La diffusion de particules chargées quant à elle correspond à un cas particulier de la diffusion de particules déjà vue dans le cas particulier où les particules en mouvements sont chargées. Cependant on parle de conduction électrique et non pas de diffusion électrique, pourquoi ?

Mathématiquement, les équations de conservation et loi de réponse électriques s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_e = 0$$

$$\vec{j}_e = n e \vec{v} = -\sigma \vec{\text{grad}} V$$

avec ρ la charge volumique, σ la conductivité du milieu et V le potentiel électrostatique.

L'équation de conservation implique donc une dérivée temporelle de ρ et la loi de réponse une dérivée spatiale de V , en combinant les deux équations on aura donc deux variables *non proportionnelles* différentes et donc pas une équation de diffusion qui suppose la même variable dans les dérivées temporelle et spatiale.

Physiquement aussi il y a une différence entre Fick/Fourier et Ohm, c'est ce qu'on se propose de voir dans la prochaine partie :

2.3 Modèle microscopique

Analogies

On revient sur les précédentes analogies et on discute de l'origine de chaque type de conduction pour sentir les différences.

Fick *↪ DGLR, p.479* Ici les particules ne sont soumises à aucune force ! On peut avoir l'impression qu'elles se repoussent puisque les particules "fuient" les hautes concentrations, mais ce n'est qu'un résultat purement statistique ! Imaginons une zone où la densité est élevée... Alors des particules en sortent (par agitation thermique), mais certaines y rentrent aussi. Il y a juste plus de particules qui sortent puisqu'il y a plus de particules tout court ! Dans le cas critique, où la densité est nulle en dehors d'une zone, aucune particule ne rentre :) La diffusion de particules est donc un mécanisme **piloté par l'agitation thermique**.

Fourier, Stokes Là encore, il s'agit d'un phénomène statistique que l'on détaille dans la suite pour Fourier

Ohm Cette fois-ci, pas d'agitation thermique ! Le courant est bien dû à un mouvement global des électrons (mais pas du solide !) imposé par un champ extérieur.

Ainsi, dans chaque cas, le mouvement est causé par une inhomogénéité d'une grandeur (n , T ou V) mais dans les deux premiers cas, la grandeur mise en jeu est la même que dans la dérivée temporelle... Alors que pour la conduction électronique, le potentiel V n'a rien à voir avec la densité de charge. C'est ce qui fait qu'on n'aboutit pas à une équation de diffusion.

➤ *Alloul, p.105*

➤ *Aschcroft, p.26*

On considère un modèle très simplifié (celui d'ASCHCROFT est plus simple je trouve) :

1. Les particules se déplacent sur un axe. Si on note n leur densité, la moitié $n/2$ se déplace à $+v$, l'autre à $-v$. Notons ici qu'il s'agit d'une **vitesse thermique**, $v \sim 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
2. La température est non uniforme et donne à chaque particule une énergie $u(T(x))$ (origine thermique!)
3. Les particules se thermalisent instantanément.
4. On note $l = v\tau$ le libre parcours moyen.

Ce sont les particules qui diffusent la chaleur : celle qui arrivent avec une plus grande énergie, vont la céder et inversement si leur énergie est plus faible.

Ainsi en un temps τ , les particules arrivant par la gauche au point x auront une énergie $u(T(x - v\tau))$ puisqu'elles se sont thermalisées à $T(x - \tau)$. Leur densité est de $n/2$ et elles arrivent à la vitesse $+v$, ainsi ils apportent un flux

$$j_{gauche} = \frac{n}{2} v u(T(x - v\tau))$$

De même pour les particules venant de droite :

$$j_{droite} = \frac{n}{2} (-v) u(T(x + v\tau))$$

Donc finalement, le flux surfacique est

$$j = j_{gauche} + j_{droite} = nv^2 \tau \frac{du}{dT} \left(-\frac{dT}{dx} \right)$$

Pour en déduire le résultat correspond à trois dimensions, il faut écrire que

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} v^2$$

Et puisque

$$\mathbf{j} = -\kappa \mathbf{grad} T \quad \frac{du}{dT} = c_v$$

On trouve alors une expression pour la conductivité thermique :

$$\kappa = \frac{1}{3} v^2 \tau c_v n = \frac{1}{3} v l c_v n$$

WIEDEMANN-FRANZ

On peut considérer que le gaz de particule précédemment décrit est un gaz d'électrons. Ainsi, puisque dans le modèle de DRUDE, la conductivité s'exprime comme

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

Alors, on retrouve que

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{c_v m}{3ne^2} v^2$$

Et puisque v est la vitesse thermique, on a

$$v^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

Donc on obtient la loi de WIEDEMANN-FRANZ :

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \mathcal{L}T$$

Remarque

Attention à ne pas faire dire à ce modèle plus que ce qu'il ne veut dire... Il est utile pour retrouver la loi de FOURIER, mais faut pas non plus s'amuser à calculer les valeurs théoriques de \mathcal{L} (même si en fait ça marche plutôt bien!). Contrairement à Milton FRIEDMAN, nous pensons qu'il n'est pas pertinent d'aller trop loin dans l'interprétation si on sait que notre modèle pue la merde :)

Une théorie ne doit pas être jugée par le réalisme de ses hypothèses, mais par la correction des prédictions relativement à son domaine cible. MFRIEDMAN

3 Compétition convection/diffusion

3.1 Nombre de PÉCLET

Le problème de ces deux phénomènes de transport... C'est qu'ils sont deux! Il est parfois difficile de mener des calculs à bien tant qu'on n'a pas identifié un mode de transport dominant. Pour ce faire, on est amenés à utiliser des nombres appelés nombre de PÉCLET.

Définition : Nombre de PÉCLET

Un nombre de PÉCLET est le rapport des flux convectif et diffusif :

$$\frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{\|n\mathbf{v}\|}{\|D \mathbf{grad} n\|} = \frac{VL}{D}$$

Où V , L sont respectivement les vitesses et longueurs caractéristiques et D le coefficient de diffusion. On a pris n ici, mais c'est valable pour tout type de transport (chaleur, charge, masse...)

Exemple

On utilise souvent le nombre de REYNOLDS en mécanique des fluides... Il s'agit d'un nombre de PÉCLET (diffusion de la quantité de mouvement)

Ainsi, un petit nombre de PÉCLET indique que la diffusion domine sur la convection. Et inversement, un grand nombre correspond à une situation où c'est la convection qui domine (particule chargées dans un conducteur soumis à un champ extérieur, mon café quand je touille...). OdG pour le colorant dans un verre

↪ *DGLR, p.482*

On considère souvent que dès que l'on a un mouvement du milieu, c'est la convection qui domine. Par exemple pour qu'un colorant remplisse un verre uniquement par diffusion, il faut bien attendre au moins une heure... Alors que si on mélange même très légèrement, le colorant s'homogénéise déjà très vite. En vrai, on l'a vu précédemment, c'est même pire que ça puisqu'en théorie il faudrait plusieurs années!

Ainsi, la diffusion est un processus difficile à étudier proprement... Pour s'affranchir totalement de la convection, il faut prendre beaucoup de précautions (taille des tubes / récipients, utilisation de milieux visqueux, absence de vibrations...)

3.2 Cas d'un équilibre diffusion / convection

Équilibre isotherme

On peut juste appliquer ça à l'atmosphère : avec l'étude du profil de pression on s'attend à ce que les fortes pressions plaquent les molécules au sol mais

Dans le cas d'une atmosphère de gaz parfait de masse molaire M , on a en régime stationnaire

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad p = \frac{\rho RT}{M}$$

Donc la densité de molécule n est (notons $m = M/N_a$ la masse d'une molécule)

$$n(z) = \frac{\rho}{m} = n_0 e^{-\frac{mgz}{k_B T}}$$

De plus, les particules subissent

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\alpha \mathbf{v} + m\mathbf{g}$$

Donc en régime permanent

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{g} \quad \text{où } \mu = \frac{m}{\alpha} \text{ est la mobilité}$$

Ainsi on peut définir une densité de courant de particule

Convectif

$$\mathbf{j}_{conv} = n\mathbf{v} = \mu n\mathbf{g}$$

Diffusif

$$\mathbf{j}_{diff} = -D \mathbf{grad} n = -\frac{Dm\mathbf{g}}{k_B T} n$$

Et puisqu'on est en régime stationnaire, il est nécessaire que ces deux flux surfaciques soient opposés : autant de particules qui descendent à cause de la gravité que de particules qui montent par diffusion. C'est bien ce qu'on obtient et l'identification nous permet même d'exprimer la mobilité :

$$\mu = \frac{Dm}{k_B T}$$

Ici, on a d'abord la convection qui tasse les particules vers le bas. Ceci crée un gradient de concentration (plus élevé en bas). Ce gradient induit alors une diffusion des particules vers le haut. Finalement les deux flux tendent à s'équilibrer.

C'est très analogue à ce qu'il se passe dans une jonction PN mais dans l'autre sens ! En effet, pour une telle jonction, c'est plutôt un déséquilibre de concentration de porteurs de charges qui induit un courant diffusif... À cause de ce courant, il se crée une différence de charge entre les deux parties, donc un champ électrique, donc un flux convectif. Les deux flux tendent également à se compenser !

4 Questions

★ Quel niveau pour ta leçon ?

Quasi L2 sauf pour Drude, dérivée particulière, TF

★ C'est quoi une loi phénoménologique ?

Une loi qui est formulée à partir de l'expérience

★ Tu as d'autres types de loi en tête ?

★ La loi de base c'est plutôt celle de Fourier, comment tu expliques que c'est logique ?

Le transfert va du chaud vers le froid, linéaire, indépendant du temps

- ★ Pourquoi on a besoin d'un équilibre thermodynamique **local**?

Pour définir des champs (température par exemple)

- ★ Définition simple du libre parcours moyen?

Distance moyenne que la particule parcourt entre deux collisions

- ★ D'autres exemples en physique où on a besoin d'une échelle mésoscopique?

*En EM pour définir **E** et **B** ou méca flu*

- ★ Dans ce cas c'est quoi une particule de fluide?

C'est un volume de fluide de taille mésoscopique

- ★ Tu peux nous présenter le modèle de Drude et ses hypothèses?

Les électrons doivent avoir un taux de collision moyen τ , être à l'équilibre thermique après chaque choc, ils sont non-relativistes et classiques, les électrons sont libres et indépendants

- ★ De manière simple, quelle est la logique d'une équation de conservation?

Il faut identifier la variation d'une grandeur aux transferts dus aux flux.

- ★ Pourquoi avoir choisit l'expérience avec l'ammoniac?

C'est une des seules expériences de diffusion de matière simple à mettre en oeuvre.

- ★ Le tube a besoin d'être placé à l'horizontal?

Le risque en vertical, c'est que la pesanteur joue... Mais là c'est plus facile de croire en la diffusion vu que y a pas de force en jeu a priori!

- ★ En général, à partir de quand la convection prend le dessus?

On peut raisonner sur les temps de convection et les temps de diffusion... Mais dans généralement c'est la convection qui domine (dès qu'il y a un mouvement macroscopique)

- ★ T'as dit qu'il existait de la diffusion de quantité de matière ... Explique!

C'est lié à la viscosité, les particules de fluide se mettent en mouvement par chocs.

- ★ T'as parlé de rayonnement thermique... Tu peux définir? Quelles différence principal avec les autres modes de transport?

Fonctionne dans le vide

- ★ Wiedeman-Franz c'est d'abord empirique?

Oui

- ★ Pourquoi l'atmosphère n'est pas stratifié? (il devrait y avoir le diazote au dessous du dioxygène)

À cause de la convection

- ★ Y a une manière simple d'expliquer la théorie cinétique des gaz?

- ★ Quels sont les limites du théorème d'équipartition?

Il faut être en milieu continu, et dans la limite thermo... Donc pas trop basse température où certains degrés de liberté peuvent-être gelés.

- ★ Volume mésoscopique, quelle taille?

Ça dépend gaz/liquide mais en gros le micromètre

- ★ Exemple de grandeurs non-conservées

Entropie..

- ★ Dès qu'il y a un terme d'apparition c'est non-conservé, donc dans le cadre de réactions nucléaires/chimiques ça marche pas, il faut les virer ! La chaleur n'est pas conservée non plus

- ★ Dans les DL, pourquoi s'arrêter à l'ordre 1

Le premier terme non-nul et il contient bien de la physique. De plus, la loi de Fick c'est phénoménologique donc l'ordre 2 sert à rien

- ★ Dans la généralisation, développer le terme en $\text{div}(\mathbf{j} + n\mathbf{v})$

On fait apparaître une dérivée particulière

- ★ Et $n \text{ div } \mathbf{v}$ alors ?

Il vire avec les écoulement incompressibles, c'est la déformation de ton volume mésoscopique

- ★ Dans la loi de Fick, le D dépend de quoi ?

Pas de n , il dépend de T et évidemment des particules en question

- ★ Sur la fin, faire gaffe, le stationnaire qui veut dire ce qui monte = ce qui descend, c'est valable dans un cadre macro, au niveau micro les particules montent. Le vecteur \mathbf{j} il faut préciser que c'est moyen là

— Ça manque un peu de Physique, de vision d'ensemble (accentuer les analogies, commenter le tableau qui serait bien à la fin)