

LP27 - Propagation guidée des ondes

Cléments (DE LA SALLE et COLLÉAUX)

12 juin 2020

Niveau : L2/3 ?

Bibliographie

↗ Poly de Étienne Thibierge	→	Il carry
↗ Garing	→	Le meilleur toujours
↗ BUP 742	→	Manip
↗ Quaranta I	→	Manip MP29
↗ RdD onde guidée	→	

Prérequis



Expériences



Table des matières

Table des matières	1
1 Fibre à saut d'indice (à choisir entre ça et les ondes sonores)	2
1.1 Approche géométrique	2
1.2 Approche interférentielle	3
1.3 Dispersion	3
2 Guidage sonore (pour changer un peu)	4
2.1 Rappels sur les ondes sonores	4
2.2 Quantification	4
2.3 Dispersion	6
3 Guide d'onde électromagnétique	6
3.1 Modélisation	7
3.2 Modes TE et TM	7
3.3 Étude d'un mode TE	9
3.4 Dispersion	10
3.5 Aspects énergétiques ?	11

Introduction

La problématique est un enjeu majeur : comment transporter efficacement une information ? Il s'agit ici de guider une onde afin de l'emmener le plus loin possible sans trop de perte énergétique.

Expérience : Guidage des ondes acoustiques

➤ BUP 742 ou Quaranta I (Ultrasons)

⌚ 2 min

Placer les piézo à 2m, envoyer des bursts de 40kHz et constater qu'à l'air libre, le signal n'arrive quasiment pas. Placer un tube entre les deux, c'est beaucoup mieux ! On remarque que le burst capté est déformé. Cela est principalement dû aux piézo, plus qu'à la propagation, mais tout de même, on espère voir plusieurs modes (des "sous-bursts" arrivant de façon désynchronisée). Faire varier l'angle d'émission et observer que les modes se répartissent l'énergie différemment. Utiliser finalement un tuyau plus petit et constater qu'on n'a plus tout ces modes...

On peut aussi imaginer de filer cette expérience sur toute la leçon, plutôt que de tout faire d'un coup...

1 Fibre à saut d'indice (à choisir entre ça et les ondes sonores)

➤ Thibierge, p.47

But

On cherche en premier lieu à comprendre avec les mains les principales caractéristiques du guidage d'onde : quantification des modes et dispersion. On prend l'exemple d'une onde électromagnétique entre deux diélectriques dans une fibre à saut d'indice.

1.1 Approche géométrique

Lorsque l'on envoie une onde d'un milieu d'indice n vers un autre milieu d'indice $n' < n$, il peut y avoir réflexion totale dans le cas où

$$\theta \leq \arccos \frac{n'}{n}$$

On peut alors imaginer une fibre à saut d'indice, dans laquelle l'onde subit une suite de réflexions totales.

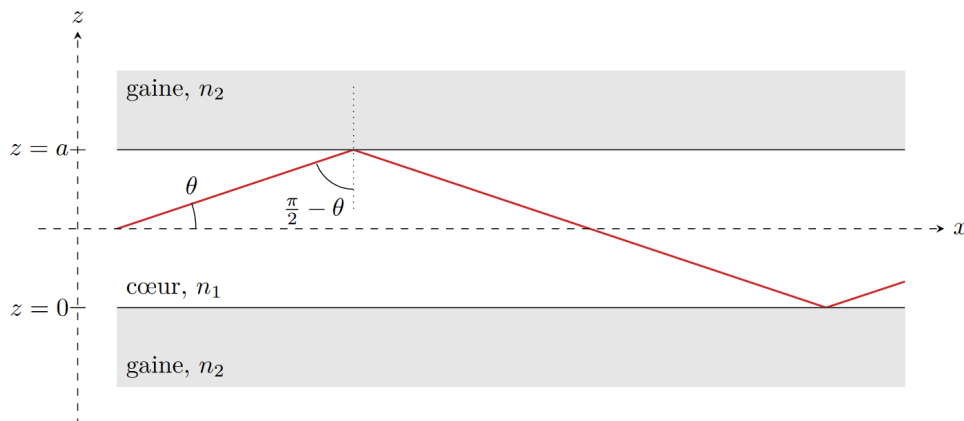


FIGURE 1.1 – Attention l'angle θ est défini par rapport à l'axe d'entrée et non pas à la normale aux plans

1.2 Approche interférentielle

Mais il faut maintenant prendre en compte le caractère ondulatoire de l'onde, à cause des nombreuses réflexions, l'onde interfère avec elle-même :

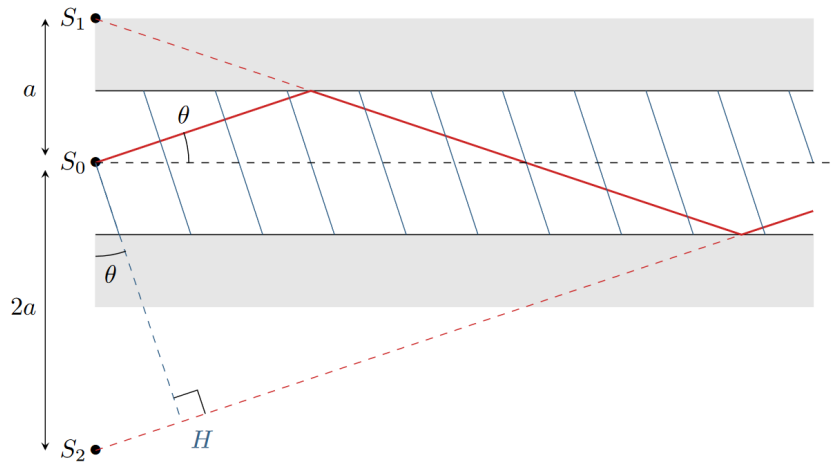


FIGURE 1.2 – Après deux réflexions, l'onde présente le même système de plans d'onde qu'initialement.

La différence de chemin optique entre les deux trajets est alors

$$\delta = 2a \sin \theta$$

Et on obtient ainsi une condition d'interférences constructives :

$$\sin \theta_p = \frac{\lambda}{2a} p = \frac{\pi c}{a\omega} p \quad p \in \mathbb{Z}$$

Quantification

Encore une fois, on voit le lien entre confinement et quantification. De même que pour la corde de MELDE, le FABRY-PÉROT, le puits de potentiel infini... Le fait d'imposer des conditions aux limites donne lieu à une quantification de l'onde. Ici, les conditions aux limites s'illustrent dans la réflexion.

On voit alors apparaître la notion de **mode** : Une longueur d'onde donnée peut se propager sous différents modes, chaque mode correspondant à un certain angle.

1.3 Dispersion

On remarque que pour qu'une pulsation se propage, elle ne peut pas être inférieure à une pulsation de coupure (OdG !)

$$\sin \theta_p \leq 1 \implies \omega \geq \omega_p^c = \frac{\pi c}{a} p$$

Comme dans un plasma, les trop basses fréquences ne passent pas. On remarque que cette pulsation de coupure dépend du mode considéré. Ainsi dans un guide plus large, un plus grand nombre de modes peuvent se propager.

Au passage, le mode $p = 0$ se propage toujours... Logique !

Manip' : Guide sonore

Revenir sur l'expérience introductive pour bien remonter que la taille du guide joue un rôle dans le nombre de modes transmis et que ces modes dépendent également de l'angle de départ

Puisqu'il y a une pulsation de coupure, la relation de dispersion est tout sauf linéaire, donc il y a dispersion, donc il faut s'intéresser aux vitesses de phase et de groupe. La vitesse de groupe se calcul par simple projection sur l'axe horizontal

$$v_g = v \cos \theta = \frac{c}{n} \cos \theta$$

Ceci traduit juste le fait que si tu passes ton temps à te cogner contre les murs, tu vas pas beaucoup avancer...

Ainsi on peut définir une vitesse de groupe associée à un mode ET une longueur d'onde :

$$v_p(\lambda) = \frac{c}{n} \cos \theta_p = \frac{c}{n} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda p}{2a}\right)^2}$$

On conçoit alors qu'il existe deux phénomènes de dispersion :

Intermodale Une longueur d'onde λ , peut se propager à différentes vitesses suivant le mode par lequel elle est portée. Elle n'est due qu'au confinement dans le guide.

Intramodale Au sein d'un mode, les différentes longueurs d'ondes ne vont pas à la même vitesse. Elle est présente de base dans un milieu dispersif mais, même lorsque ce n'est pas le cas ($n = \text{cte}/\omega$), elle apparaît. Tout se passe comme si le milieu devenait lui-même dispersif!

Dans le premier cas, l'onde va réellement à la même vitesse, le mode n'a qu'une influence sur les rebonds, ce qui se traduit par des vitesses différentes le long de la fibre. Dans le second, les pulsations vont de toutes façons à des vitesses différentes lorsque le milieu est lui-même dispersif.

Ce qu'on voit dans l'expérience, c'est la dispersion intermodale : chaque "sous-burst" correspond à un mode. Pour voir la dispersion intra-modale, il faudrait zoomer sur chaque sous-burst pour espérer voir des paquets dans lesquels les basses fréquences sont plus avancées.

2 Guidage sonore (pour changer un peu)

✦ *Thibierge, p.58*

2.1 Rappels sur les ondes sonores

- Les grandeurs couplées sont la vitesse et la pression
- Elles oscillent autour de leur valeur d'équilibre
- La valeur moyenne de la vitesse est nulle
- Les ondes sont longitudinales
- La condition aux limite pour la vitesse est la non pénétration de matière (ou non-décollement), sur un solide cela se traduit par le fait que la vitesse en tangeante à la surface

2.2 Quantification

On considère une OPPH de longueur d'onde λ qui se propage avec un angle θ , on s'intéresse au champ des vitesses créé par cette onde :

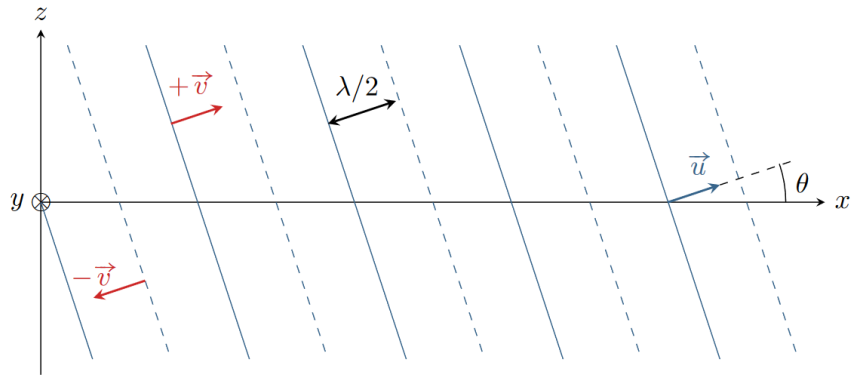


FIGURE 2.1 – Champ de vitesse pour une OPPH

Alors lorsque cette onde se superpose à son onde réfléchie (d'angle $-\theta$), le champ de vitesse devient le suivant :

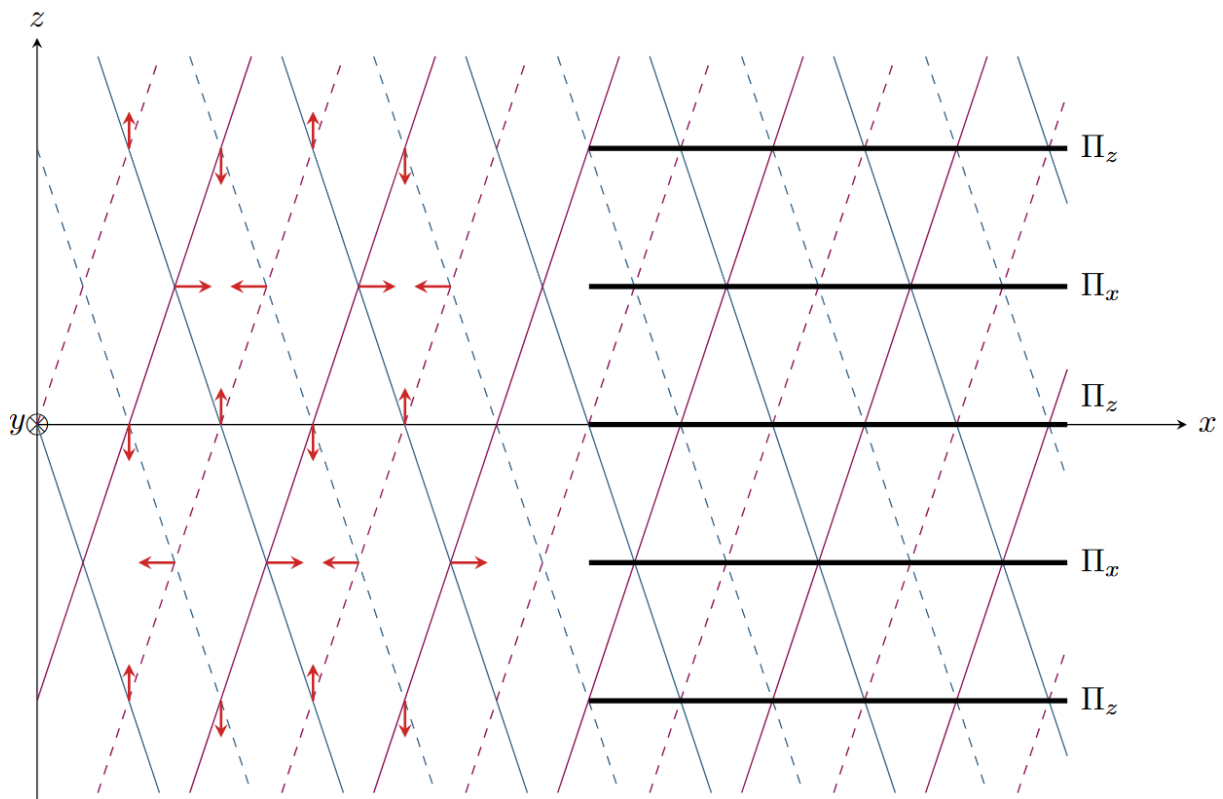


FIGURE 2.2 – Champ des vitesses pour deux OPPH symétriques

On détaille la méthode pour trouver la forme des vitesses aux points particuliers :

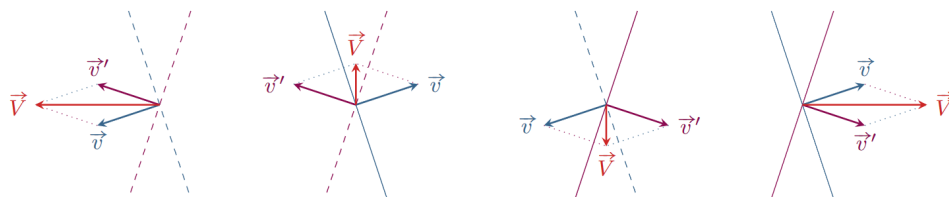


FIGURE 2.3 – Superposition de deux vecteurs vitesse en différents points particuliers

On voit alors apparaître des plans Π_x et Π_z dans lesquels la vitesse est exclusivement selon x et z respectivement. C'est là qu'on utilise la condition aux limites !

Puisqu'il faut que qu'au niveau des plans qui définissent la cavité, la vitesse soit tangentielle, alors ces plans doivent coïncider avec un Π_x , d'où une quantification :

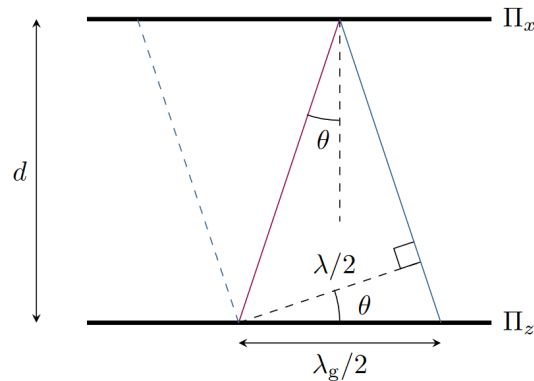


FIGURE 2.4 – Zoom

Les calculs sont pas compliqués, suffit d'écrire $\cos \theta$ en haut et $\tan \theta$ en bas puis d'utiliser la condition précédemment établie $a = 2pd$

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{2a}$$

Interférences

Il est fortement stylé de remarquer que cette condition est également une condition d'interférence constructive (cf. première partie)

Pour les commentaires, reprendre ceux de la première partie.

Longueur d'onde guidée

On a fait apparaître λ_g qui est la **longueur d'onde guidée**. C'est-à-dire la longueur d'onde effective le long de l'axe

$$\lambda_g \equiv \frac{2\pi}{\beta}$$

Cf. partie suivante pour la notation β .

Aller on peut même sortir le petit programme python des familles!

2.3 Dispersion

Exactement les mêmes remarques qu'en première partie.

3 Guide d'onde électromagnétique

🚩 *Poly de E. Thibierge, p.51*

🚩 *Bonjour King Ju, je suis le petit Popol comme tu le sais si bien*

On l'a dit et répété, mais on va le refaire encore, pour avoir propagation guidée des ondes il faut des CL qui vont quantifier l'onde. Pour la propagation guidée d'ondes EM il faut donc trouver un moyen d'annuler l'onde pour créer des CL. On utilise pour cela un métal considéré comme parfait.

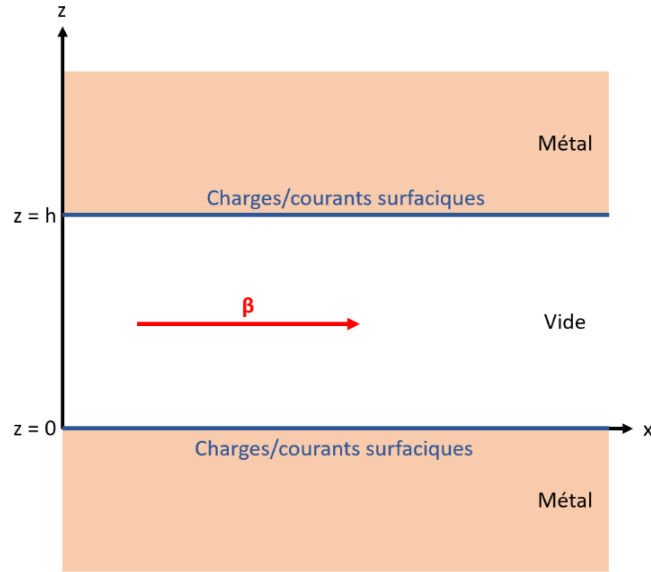


FIGURE 3.1 – Modélisation du guide d’onde EM 2D

3.1 Modélisation

On étudie alors le système suivant :

En $z = 0$ et $z = h$ sont disposées deux plaques d’un métal **parfait** supposées infinies de sorte que le système soit invariant en y . En effet, dans un métal parfait il n’y a ni champ électrique, ni champ magnétique (ni propagatif ni évanescents puisque c’est PARFAIT) et ceci combiné aux équations de continuité permettent d’écrire les CL :

— $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ dans le métal et B_z est continu à l’interface donc $B_z(z = 0) = B_z(z = h) = 0$

— $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ dans le métal et $E_x = E_y$ sont continus à l’interface donc $E_x(z = 0) = E_x(z = h) = 0$ et $E_y(z = 0) = E_y(z = h) = 0$

Maintenant qu’on a les CL qu’on voulait, montrons qu’elles quantifient bien l’onde. Pour cela, écrivons les équations vérifiées par cette onde.

3.2 Modes TE et TM

Pour écrire les équations de propagation de l’onde, il faut savoir dans quel milieu cette onde se propage. Pour cette première étude on assimilera le milieu de propagation au vide donc non-dispersif et d’indice optique 1.

Une onde EM qui se propage dans la direction \vec{e}_x vérifie donc les équations de MAXWELL dans le vide :

- $\text{div } \mathbf{E} = 0$
- $\text{div } \mathbf{B} = 0$
- $\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- $\text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

Avec l'invariance de notre système en y on peut développer ce système pour arriver à 8 équations scalaires :

- $\partial_x E_x + \partial_z E_z = 0$
- $\partial_x B_x + \partial_z B_z = 0$
- $\partial_z E_x - \partial_x E_z = -\partial_t B_y$
- $-\partial_z E_y = -\partial_t B_x$
- $\partial_x E_y = -\partial_t B_z$
- $\partial_z B_x - \partial_x B_z = \frac{1}{c^2} \partial_t E_y$
- $-\partial_z B_y = \frac{1}{c^2} E_x$
- $\partial_x B_y = \frac{1}{c^2} E_z$

Un œil avisé (Alt + 0156 pour le oe chelou) remarque alors qu'on peut séparer ce système immonde en deux sous-systèmes légèrement moins immondes (croyez moi vous voulez pas voir le .tex) :

- $\partial_x E_x + \partial_z E_z = 0$
- $\partial_x B_x + \partial_z B_z = 0$
- $\partial_z E_x - \partial_x E_z = -\partial_t B_y$
- $-\partial_z E_y = -\partial_t B_x$
- $\partial_x E_y = -\partial_t B_z$
- $\partial_z B_x - \partial_x B_z = \frac{1}{c^2} \partial_t E_y$
- $-\partial_z B_y = \frac{1}{c^2} E_x$
- $\partial_x B_y = \frac{1}{c^2} E_z$

On sépare ainsi ces 8 équations à 6 inconnues en deux systèmes indépendants de 4 équations à 3 inconnues :

- le groupe Transverse Magnétique (TM) ui comprend (E_x, E_z, B_y) . Il est appelé TM car dans le cas général le champ magnétique associé est transverse à la direction de propagation
- le groupe Transverse Électrique (TE) ui comprend (B_x, B_z, E_y) . Il est appelé TE car dans le cas général le champ électrique associé est transverse à la direction de propagation

groupe Transverse Magnétique (TM)

- $\partial_x E_x + \partial_z E_z = 0$
- $\partial_z E_x - \partial_x E_z = -\partial_t B_y$
- $-\partial_z B_y = \frac{1}{c^2} E_x$
- $\partial_x B_y = \frac{1}{c^2} E_z$

groupe Transverse Électrique (TE)

- $\partial_x B_x + \partial_z B_z = 0$
- $-\partial_z E_y = -\partial_t B_x$
- $\partial_x E_y = -\partial_t B_z$
- $\partial_z B_x - \partial_x B_z = \frac{1}{c^2} \partial_t E_y$

Remarques

- Pour chaque groupe, la connaissance du champ transverse permet de déterminer les deux autres inconnues (ex de E_y pour le groupe TE)
- Dans le cas général, une onde qui appartient au groupe (TE) n'appartient pas au groupe (TM) et réciproquement.
- Grâce à la linéarité du système {équation de d'Alembert + CL} on peut séparer

le problème en deux sous-problèmes et conclure en invoquant le principe de superposition *Futon ! Le principe de superposition !*

- On appelle *mode TE* une onde harmonique du groupe (TE)
- Les modes TE et TM forment toujours une base des modes de propagation d'un guide d'onde uniaxe (un seul axe de propagation)

| On sent bien ici que les deux groupes jouent des rôles symétriques, c'est pourquoi on va étudier uniquement un mode TE

3.3 Étude d'un mode TE

L'approche phénoménologique conduit à chercher le champ électrique sous la forme d'une onde progressive dans la direction de propagation x , mais pas d'une onde plane au sens strict. Ainsi, on va chercher, avec \mathbf{E} selon \mathbf{e}_x d'après la définition du mode TE :

$$\mathbf{E}(x, z, t) = E(z) e^{i(\omega t - \beta x)} \mathbf{e}_x$$

ATTENTION C'EST UN β

On note ici β et non pas k , les deux ont la même signification mais la notation k ferait référence au vecteur d'onde d'une onde plane, ce qui n'est ici pas le cas ! On associe tout de même à β une longueur d'onde, la longueur d'onde guidée λ_g définie par $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_g}$.

Cherchons donc à déterminer la fonction $E(z)$ en injectant cette forme de \mathbf{E} dans l'équation de d'Almebert :

$$\begin{aligned} (\partial_x^2 + \partial_z^2) E(z) e^{i(\omega t - \beta x)} + \frac{\omega^2}{c^2} E(z) e^{i(\omega t - \beta x)} &= 0 \\ E(z) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 \right) + \frac{d^2}{dz^2} E(z) &= 0 \\ K^2 E(z) + \frac{d^2}{dz^2} E(z) &= 0 \end{aligned}$$

On introduit la quantité $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2$ qui caractérise la dépendance de $E(z)$ en z . La forme des solutions de l'équation dépend en effet du signe de K^2 :

- $K^2 < 0$: la solution est une somme d'exponentielles réelles, qui ne peut pas s'annuler deux fois à moins d'être identiquement nulle.
- $K^2 > 0$: a solution est une somme de sinus et cosinus, qui peut cette fois s'annuler deux fois de façon non triviale

Seul le cas $K^2 > 0$ est donc pertinent et la résolution de l'équation donne :

$$E(z) = A \cos Kz + B \sin Kz$$

Et en prenant en compte les CL $E(z=0) = E(z=h) = 0$, il vient

$$E(z) = E_0 \sin \left(\frac{p\pi z}{h} \right), \quad p \in \mathbb{N}$$

Soit un champ \mathbf{E} :

$$\mathbf{E}(x, z, t) = E_0 \sin\left(\frac{p\pi z}{h}\right) e^{i(\omega t - \beta x)} \mathbf{e}_x, \quad p \in \mathbb{N}$$

On voit l'apparition de modes qui traduisent bien l'existence de CL. Un mode TE est donc entièrement caractérisé par un entier p , on indice alors les modes et parle du mode TE_p .

On vérifie aussi que ça n'a rien d'une onde plane.

3.4 Dispersion

En particulier, une onde EM dans le vide vérifie l'équation de propagation de JEAN LE ROND (vous aviez tous compris qu'il s'agissait du prénom de d'Alembert) :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{B} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ce qui mène à la RdP (enfin presque mais β a ici le rôle d'un vecteur d'onde sans en être un lui-même)

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \beta^2 = \left(\frac{\pi p}{h}\right)^2$$

RdD de KLEIN-GORDON qui dépend de p : une onde de pulsation donnée (à ω fixée) ne peut se propager que dans un nombre de modes limité (nombre de p possibles).

Étudions maintenant la relation pour un mode p fixé. Pour avoir propagation sans atténuation d'une onde de pulsation ω dans ce mode, il faut $\beta \in \mathbb{R}$, soit :

$$\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi p}{h}\right)^2 > 0$$

Ce qui correspond à la condition $\omega > \omega_{c,p} = \frac{p\pi c}{h}$ on retrouve la pulsation de coupure (déjà vu lors de l'étude d'un plasma) de l'ordre p . On a un comportement passe-haut.

OdG

Pour l'ordre $p = 1$, avec $h = 5 \text{ mm}$, on trouve $\omega_{c,1} = 1.88 \times 10^{11} \text{ rad/s}$ soit $f_{c,1} = 30 \text{ GHz}$. Pour une utilisation pratique, les dimensions du guide doivent être adaptées à l'onde que l'on souhaite guider. OdG aussi pour du 50 Hz, on a h de l'ordre de la centaine de km (à poser mais c'est très grand) donc c'est pas approprié pour les basses fréquences.

Mode TEM

On note que pour une onde du mode TEM, on a une onde plane et donc pas de dispersion intermodale ! C'est pratique pour propager de l'information loin !

Quelques mots sur la dispersion **intermodale** à ω fixé entre les ordres et la dispersion **intra-modale** à ordre p fixé et entre les pulsations qui avaient été introduites précédemment et qui sont encore là !

3.5 Aspects énergétiques ?

Questions

- ★ Pourquoi les fibres optiques sont moins sensibles au bruit ?

Pas les mêmes fréquences, on est plus vite en champ lointain

- ★ Quel matériau pour la fibre ?

Plastique ou SC

- ★ Problème des plastiques ?

Ça fond (en forçant) et les déformations modifient l'indice (biréfringence cf Jolidon)

- ★ En élec on ré-amplifie régulièrement le signal si on veut parcourir des kilomètres, comment on fait ça avec les fibres ?

Fibres optiques dopées par les fréquences incidentes (émission stimulée quoi)

- ★ Comme c'est codé un signal dans les fibres optiques ?

Pulse pour les 0 et 1

- ★ Comment s'assurer qu'on a un petit angle d'entrée dans la fibre ?

Lentille

- ★ Bien expliquer le modèle interférentiel et la construction

- ★ Intuitivement, pourquoi un rayon plus petit pour les monomodes ?

Dépendance de la fréquence de coupure en le rayon

- ★ Dans le monomode c'est quoi le problème avec la dispersion ?

Densité de puissance plus grande donc plus sensible aux NL

- ★ Définir dispersion intramodale et intermodale

Intra : à n fixé (mode fixé), RdD NL (mais pas le système NL donc on a pas système NL \implies enrichissement spectral) ou vitesse de groupe dépend de ω et Inter : à ω fixé, vitesse de groupe dépend du mode n

- ★ Exemple de guidage avec un seul plan

Sur la surface d'un conducteur on est localisé spatialement avec l'exponentielle décroissante... Mouais bof

- ★ TEM, RdD linéaire ?

Yep

- ★ Pourquoi à haute fréquence toutes les vitesses de groupe se rapprochent de c ?

Dans la RdD, le terme qui fait chier devient négligeable. Physiquement, $\lambda \ll h$ donc on ne "sent plus" les CL

- ★ Paquet d'onde étalé, dessiner sa propagation, qui va (enveloppe et oscillation) à quelle vitesse...

- ★ Source de pertes ?

énergie dissipée dans les conducteurs avec des conducteurs réels

- ★ Sur la manip, impact de l'impédance de sortie

Onde stat pour une impédance infinie (paroi métallique) et propag pour impédance nulle (rien)

- ★ Onde confinée dans un puit quantique ?

Fonction d'onde qui est complexe (vs \mathbf{E}) et le puit a plein de modes propres alors qu'un OHC a qu'un seul mode propre. On peut aussi faire le parallèle avec les instruments de musique