

LP28 - Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

Cléments (COLLÉAUX et DE LA SALLE)

Mardi 21 Janvier

Niveau : L3

Bibliographie

- BFR EM 4 ♡ →
- Jackson EM →
- Mauras EM 2e année →
- Pérez EM →
- Dinda**, *Électromagnétisme : Ondes et propagation guidée* → Chap. 5 c'est cool!

Prérequis

- EM dans le vide
- Moment dipolaire
- Polarisation dans la matière

Expériences

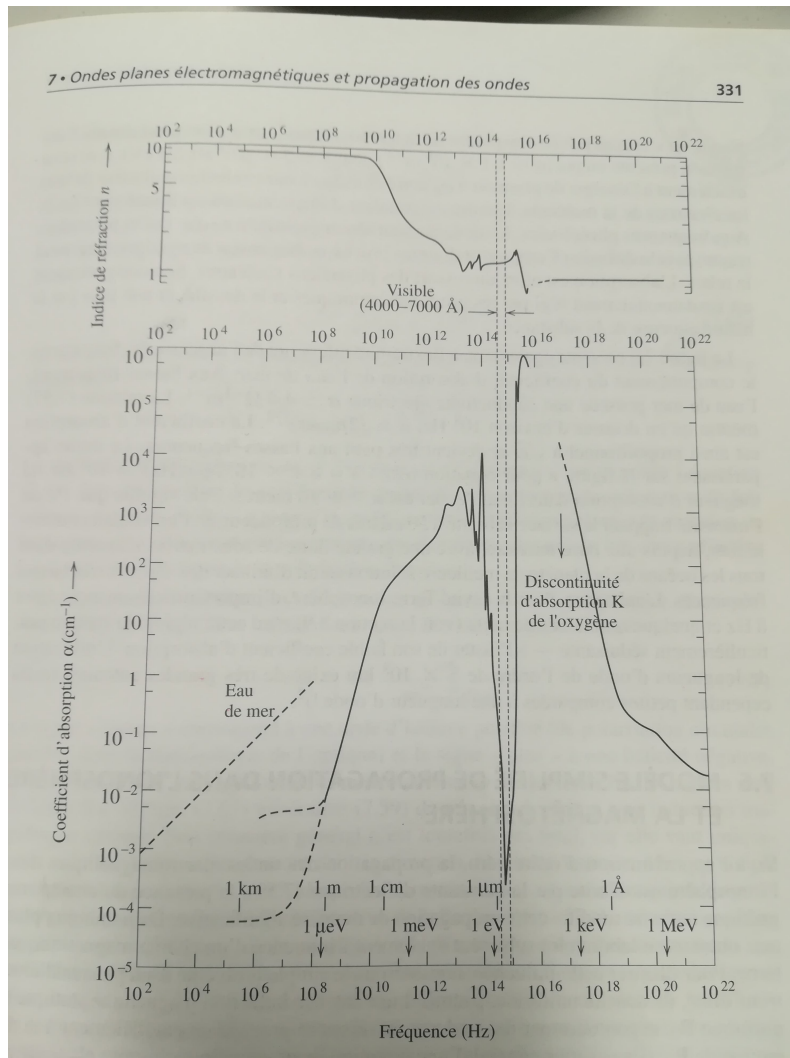


Table des matières

Table des matières	1
1 Milieux diélectriques	2
1.1 Vecteur polarisation	2
1.2 EM et relation constitutive	4
1.3 Equation de propagation	5
2 Conséquences sur les ondes EM	6
2.1 Modèle de l'électron élastiquement lié	6
2.2 Dispersion : la loi de Cauchy	10
2.3 Absorption : loi de Beer-Lambert	11

Introduction

Jusqu'à aujourd'hui, on a étudié essentiellement la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Mais comment expliquer certains phénomènes tels que l'absorption d'une onde EM dans la matière ? Comment expliquer cette magnifique courbe d'absorption de l'eau ?



Pour répondre à cette question, on est amené à étudier des matériaux que l'on qualifie de diélectriques.

1 Milieux diélectriques

1.1 Vecteur polarisation

Définition : Matériau diélectrique

Matériau qui possède un moment dipolaire permanent, ou susceptible d'en acquérir un lorsqu'on lui applique un champ électrique.

Remarque : *dia* à travers traduit que le champ électrique pénètre dans le matériau.

Différence conducteur/ diélectrique : Dans les diélectriques, les charges restent attachées à un point fixe, dans les conducteurs les charges sont libres. C'est la différence $\mathbf{j}_{\text{liés}} / \mathbf{j}_{\text{libres}}$. On se limitera dans la leçon au diélectrique parfait : $\mathbf{j}_{\text{libres}} = \mathbf{0}$ et $\rho_{\text{libres}} = 0$ et pas d'aimantation.

Dans le modèle diélectrique, l'application d'un champ extérieur \mathbf{E} induit un déplacement des charges liées. Il y a séparation des barycentres des charges + et - et donc apparition d'un moment dipolaire électrique \mathbf{p} d'unité $C \cdot m$. Nous verrons plus tard un modèle de cette séparation de charges.

Remarque

Ainsi, sous l'action d'un champ électrique extérieur, il y a création dans les milieux diélectriques de moments dipolaires \mathbf{p} . Nous avons déjà vu qu'un moment dipolaire créait un champ électrique dipolaire \mathbf{E}_M et ce champ s'ajoute au champ extérieur. le champ qui agit sur la matière est donc modifié par la réponse de la matière. Dans le suite de ce cours nous traiterons de milieux dilués dans lesquels ce champ réponse est négligeable.

Regardons maintenant les conséquences de ces moments dipolaires \mathbf{p} . Par analogie avec le couple \mathbf{M} et \mathbf{M} dans les milieux magnétiques, on définit le vecteur **densité de moment dipolaire** ou **vecteur polarisation \mathbf{P}** en $C \cdot m^{-2}$:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tau} \tag{1.1}$$

Définition : Vecteur polarisation

Le vecteur polarisation \mathbf{P} est défini comme une densité volumique de moment dipolaire. Ainsi le moment dipolaire $d\mathbf{p}$ d'un volume $d\tau$ est donné par la relation

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} d\tau$$

On peut alors associer un courant à cette grandeur : dans un cas simple où \mathbf{P} est uniforme, si les charges q_i sont placées en \mathbf{r}_i , alors on peut écrire :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{V} \sum_i q_i \mathbf{r}_i$$

Donc on voit apparaître un courant (appelé **courant lié**) en dérivant par rapport au temps :

$$\mathbf{j}_{\text{lié}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$$

En effet, on a

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{V} \sum_i q_i \mathbf{v}_i = \mathbf{j}$$

Puisque ce courant existe et que la charge est conservée, il faut lui associer une **densité de charge liée**, de sorte que :

$$\frac{\partial \rho_{\text{lié}}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{lié}} = 0$$

D'où l'expression suivante :

$$\rho_{\text{lié}} = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

Enfin, on peut aussi associer à ce vecteur une densité surfacique de charge (sur une surface orientée selon \mathbf{n}), comme illustré sur la figure :

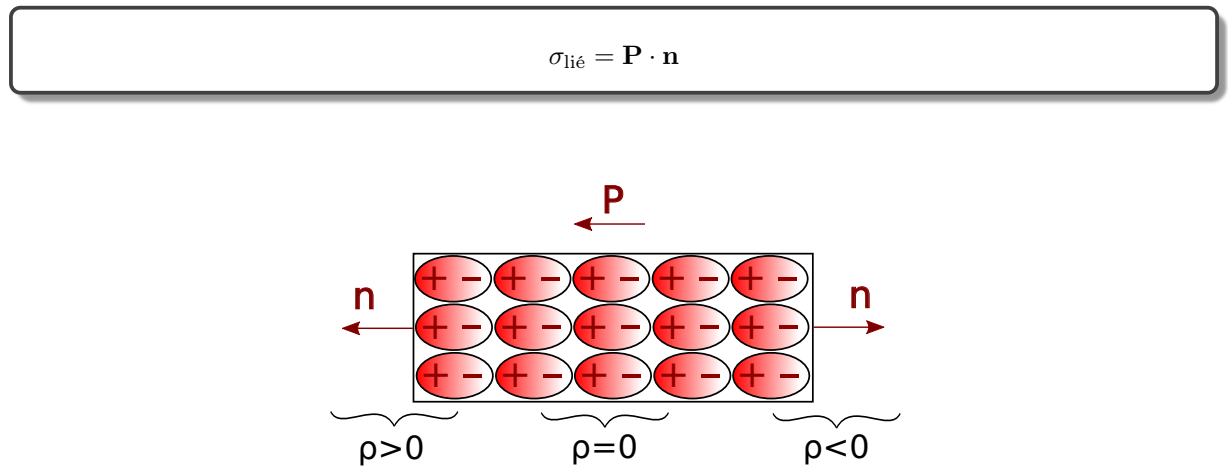


FIGURE 1.1 – Illustration de la densité volumique de charge et de la densité surfacique de charge

1.2 EM et relation constitutive

En divisant les charges / courants en charges / courants liés et libres, on peut donc écrire les équations de Maxwell de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0} - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Ainsi, on est amené à poser naturellement le **vecteur de déplacement électrique**, $\mathbf{D} =_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, de sorte que les équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D} = \rho_{\text{libre}} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_{\text{libre}} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Mais pour fermer ce système d'équations (9 équations scalaires, bien se rappeler qu'un **rot** compte pour 2, pour 12 inconnues \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} , \mathbf{P}) on rajoute une condition sur \mathbf{E} et \mathbf{P} , qui découle des considérations microscopiques présentées en première partie : **dans le domaine de Fourier et uniquement dans le domaine de Fourier**, on écrit que :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \chi_e \tilde{\mathbf{E}}$$

Avec χ_e un tenseur appelé **susceptibilité électrique**. On est souvent amenés à faire quelques hypothèses sur sa forme :

- Milieu linéaire $\implies \chi_e$ ne dépend pas de \mathbf{E}
- Milieu homogène $\implies \chi_e$ est indépendant de l'espace
- Milieu isotrope $\implies \chi_e$ est une matrice proportionnelle à l'identité donc c'est un scalaire

Dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, abréviation DLHI, on peut donc écrire (avec $\epsilon_r = 1 + \chi_e$)

$$\tilde{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \epsilon_r \tilde{\mathbf{E}} = \epsilon \tilde{\mathbf{E}}$$

En exemples de DLHI on peut citer l'eau, les gaz sous hypothèse d'homogénéité et des solides amorphes (verre) et certains cristaux.

gaz (20°C-1 atm)	$10^6 \chi_e$	liquides (20°C)	ϵ_r	solides	ϵ_r
Hélium	65	Eau	80,36	Diamant	5,5
Néon	127	CCl ₄	2,238	Silice pure	3,78
Argon	517	Benzène	2,284	Paraffine	2,20
Hydrogène	254	Nitrobenzène	35,74	Nylon	3,5
Oxygène	495	Acide acétique	6,15	Polyéthylène	2,3
Azote	547	Éthanal	4,34	Verres	4 à 7
Gaz carbonique	921	Éthanol	25,1	Plexiglass	3,4
Air sec	537	Glycérol	43,5	Téflon	2,1
		Acétone	21,2	Titane	
				de Baryum	~1500

FIGURE 1.2 – Valeurs de ϵ_r et χ_E pour quelques DLHI - On présente ici les permittivités statiques (donc pas complexes). Tiré du EM 2 éd. Dunod coll. J'intègre

1.3 Equation de propagation

On se rappelle qu'on se place dans le cas d'un **DLHI parfait** et non magnétique :

$$\begin{cases} \rho_{libre} = 0 \\ \mathbf{j}_{libre} = 0 \\ \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

Comme d'habitude, on applique deux fois le rotationnel à \mathbf{E} : d'une part

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

On fait alors les hypothèses suivantes : le milieu est **linéaire**, **homogène** et **isotrope**, on peut passer en domaine de Fourier avec une OPPS $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ pour utiliser la relation $\tilde{\mathbf{D}} = \epsilon \tilde{\mathbf{E}}$. Et comme le milieu est homogène, on a $(\mathbf{E}) = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = 0$

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \mathbf{E} &= \text{rot} \left(-i\omega \tilde{\mathbf{B}} \right) \\ &= -i\omega \text{rot } \tilde{\mathbf{B}} \\ &= \mu_0 \omega^2 \tilde{\mathbf{D}} \\ &= \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

On retrouve alors une équation d'onde en domaine de Fourier :

$$\Delta \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} \tilde{\mathbf{E}} = 0$$

Cette équation ressemble beaucoup à l'équation de d'Alembert obtenue dans le vide, au facteur ϵ_r près qui est la caractéristique des milieux diélectriques.

Aepinus pour montrer qu'un diélectrique modifie ϵ ?

2 Conséquences sur les ondes EM

Dans la première partie nous avons développé le modèle mathématique du DLHI parfait, regardons maintenant les conséquences de ce modèle sur les ondes EM. En particulier penchons nous sur la résonance optique, phénomène illustré FIGURE suivante : on éclaire un DLHI dilué (vapeur de Sodium ici) avec une pulsation ω_0 et on trace l'intensité diffusée en fonction de ω , on remarque une résonance à ω_0 .

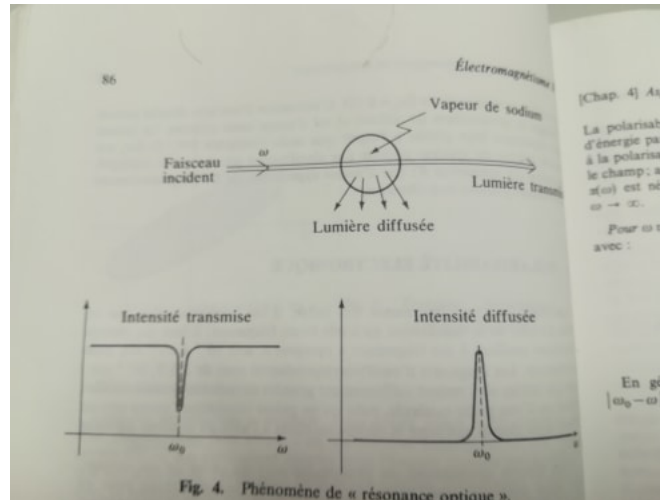


FIGURE 2.1 – Illustration d'un caractère des milieux diélectriques : la résonance optique - La résonance optique se remarque sur le graphe de l'intensité diffusée. Tiré du BFR EM IV.

2.1 Modèle de l'électron élastiquement lié

➤ Dinda p.124

Pour comprendre cette observation, il faut développer un modèle microscopique permettant d'avoir accès à χ_E . Il s'agit d'un modèle phénoménologique (Lorentz, début XXe)

On étudie le modèle phénoménologique de l'électron élastiquement lié (pour l'hydrogène ou des atomes monoélectroniques) dont les hypothèses sont les suivantes :

- Le noyau (un proton) est fixe.
- L'électron subit une force de rappel vers le noyau (modélisation de l'interaction Coulombienne purement empirique)
- L'électron accéléré rayonne et perd de l'énergie. Cette perte se traduit par la présence d'un terme de frottement fluide $-m\dot{\mathbf{r}}/\tau$
- Le champ électrique extérieur est uniforme à l'échelle de l'atome
- On note \mathbf{r} le vecteur reliant le barycentre des charges $+$ à l'électron.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron donne alors

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\dot{\mathbf{r}}/\tau - e\mathbf{E}$$

Et puisque l'atome se modélise en terme de dipôle, on définit le vecteur $\mathbf{p} = e(-\mathbf{r})$ et en appliquant une transformée de Fourier, on a la relation

$$\mathbf{p} = \epsilon_0 \frac{-e/(e m_e)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \frac{1}{\tau} \omega} \mathbf{E} = \epsilon_0 \alpha(\omega) \mathbf{E} \quad (2.1)$$

Le coefficient $\alpha(\omega) \in \mathbb{C}$ est appelé **coefficient de polarisabilité**, en m^3 d'ordre de grandeur la taille du volume atomique.

A l'oral on va à l'essentiel : On utilise à la suite, en montrant les courbes :

1. pour un milieu dilué, $\mathbf{P}(\omega) = n_e \mathbf{p}(\omega) = -en\mathbf{p} \implies$ on a $\mathbf{P}(\omega) \in \mathbb{C}$
2. on identifie avec $\mathbf{P}(\omega) = \epsilon_0 \chi_E \mathbf{E} \implies$ on a $\chi_E(\omega) \in \mathbb{C}$
3. $\epsilon_r = 1 + \chi_E(\omega) \implies$ on a $\epsilon_r(\omega) \in \mathbb{C}$
4. $n^2 = \epsilon_r(\omega) \implies$ on a $n(\omega) = n'(\omega) + in''(\omega) \in \mathbb{C}$
5. la relation de dispersion $\mathbf{k}^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2 \implies$ on a $k = k'(\omega) - ik''(\omega) \in \mathbb{C}$

on reprend à la loi de Cauchy

Pour un milieu dilué, $\mathbf{P} = n\mathbf{p} = -en\mathbf{p}$. On utilise à la suite

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{n_e e^2 / (\epsilon m_e)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \frac{1}{\tau} \omega} \mathbf{E} \quad (2.2)$$

On a ainsi une expression de χ_E :

$$\chi_E = \frac{n_e e^2 / (\epsilon m_e)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i \frac{1}{\tau} \omega} = \chi'_E - i \chi''_E \quad (2.3)$$

Deux points importants : χ_E dépend de ω (**donc l'équation de constitution est bien valable uniquement en Fourier**) et est complexe. Notons que cette relation de proportionnalité ne s'écrit que dans le domaine des fréquences (transformée de Fourier temporelle). On peut tracer les parties réelle et imaginaire de χ_E en fonction de ω :

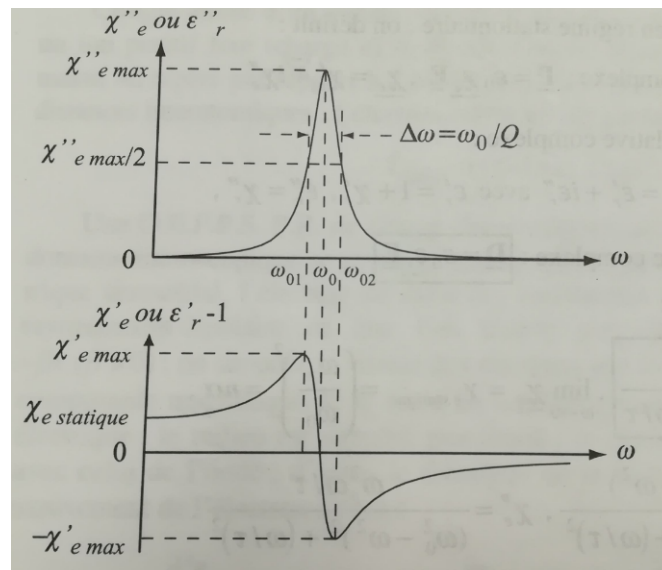


FIGURE 2.2 – Parties réelle et imaginaire de χ_E en fonction de ω - On remarque une résonance sur la partie imaginaire. Tiré du Mauras EM 2e année

La polarisabilité électronique n'est pas la seule source microscopique de polarisation. Il faut aussi citer la **polarisabilité ionique**, même phénomène mais changement d'échelle, ω_0 correspond à de l'IR et la **polarisabilité d'orientation** qui concerne l'alignement des moments dipolaires permanents avec un champ extérieur.

Injecter une onde plane $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ nous donne une relation de dispersion :

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\epsilon_r}{c^2} \omega^2$$

Nous avons déjà vu la définition de l'indice optique n qui vérifie $n^2 = \epsilon_r$. Rappelons-nous ici la définition de $\epsilon_r = 1 + \chi_E = 1 + \chi_E$. Avec le modèle de l'électron élastiquement lié, nous avons trouvé un $\chi_E \in \mathbb{C}$. Ainsi, dans un cas général, $\epsilon_r \in \mathbb{C}$, ce qui implique un indice n complexe, on note alors $n = n' - in''$. Nous verrons plus tard un calcul explicite de la relation entre ces coefficients.

La relation de dispersion est donc :

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\epsilon_r}{c^2} \omega^2 = \frac{n^2}{c^2} \omega^2$$

On a donc que $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$ on note $\mathbf{k} = \mathbf{k}' - i\mathbf{k}''$, le signe - est une convention que l'on pourra expliquer plus tard. Il est possible de montrer la relation entre les parties réelle et imaginaire de \mathbf{k} et n (solution d'un système de deux équations à deux inconnues)

$$\boxed{\frac{\omega n'}{c} = \|\mathbf{k}'\|} \quad (2.4)$$

$$\boxed{\frac{\omega n''}{c} = \|\mathbf{k}''\|} \quad (2.5)$$

Ainsi, une onde plane pourra s'écrire comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} n'' \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n' \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})} \end{aligned}$$

On a ainsi $\chi_M \in \mathbb{C}$ donc n , tel que $n^2 = \epsilon_r = 1 + \chi_E \in \mathbb{C}$. On note aussi $n = n' - in''$. n' est nommé **indice de dispersion** et n'' est l'**indice d'absorption**.

Dans les cas des milieux peu denses comme des gaz, $|\chi_E| \ll 1$ et on peut faire un DL de n : $n = 1 + \frac{\chi_E}{2}$. On trouve alors

$$\begin{aligned} n' &= 1 + \frac{n_e e^2}{2m\epsilon_0} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \\ n'' &= \frac{n_e e^2}{2m\epsilon_0} \frac{\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \end{aligned}$$

Leurs évolutions sont représentées dans la FIGURE suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(\omega) &= \epsilon_0 \alpha_{el}(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\omega) \\ \alpha_{el}(\omega) &= \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}} \end{aligned}$$

Le coefficient α_{el} , en m^{-3} est appelé **facteur de polarisabilité électronique**, il traduit la capacité d'un nuage électronique à se déformer sous l'application d'un champ extérieur. Il est de l'ordre de grandeur du volume de l'atome.

On a ainsi montré que l'application d'un champ électrique avait pour conséquence de créer un moment dipolaire. Ce raisonnement est certes très grossier mais rend bien compte de la réalité des choses. Pour

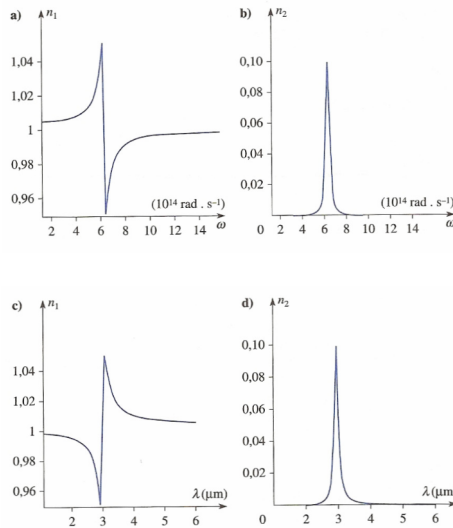


FIGURE 2.4 – **Dépendance en pulsation et longueur d’onde des indices de dispersion et d’absorption** - L’indice optique varie bien avec ν/λ . Tiré du Mauras EM 2e année

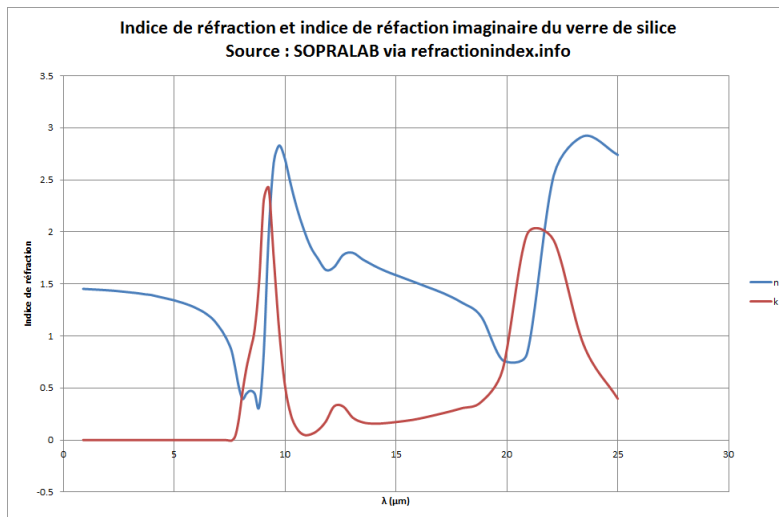


FIGURE 2.5 – Comparaison avec la théorie

l’instant, on peut tracer écrire $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ et tracer ces expressions en fonction de ω , comme illustré ci-après. Nous verrons plus tard le rôle de ces facteurs.

Différents régimes

Projeter les variations de n' et n'' avec ω et discuter des différents régimes

- $\omega \ll \omega_0$ on a $n'' \sim 0$ donc le milieu est transparent (mais réfractant également car $n' > 1$)
- $\omega \sim \omega_0$ on a un maximum de n'' donc le milieu absorbe beaucoup (micro-ondes)
- $\omega \gg \omega_0$ Retour au cas précédent

▮ *Essayons maintenant de comprendre pourquoi la partie réelle de n est appelée indice de dispersion.*

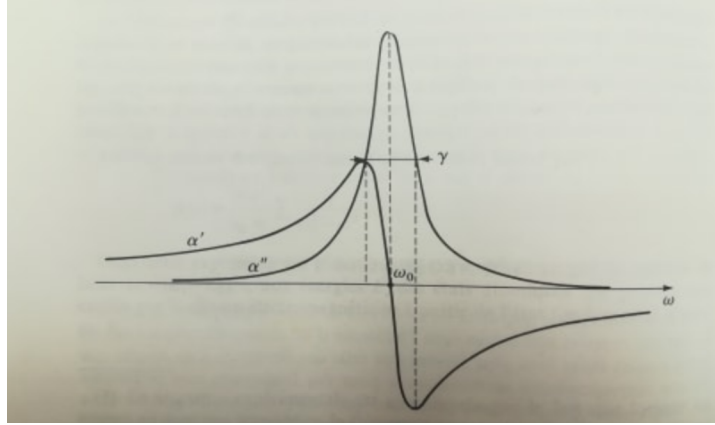


FIGURE 2.6 – Tracé des parties réelle α' et imaginaire α'' de la polarisabilité électrique - Tiré (et redressé) de l'incontournable BFR EM IV

2.2 Dispersion : la loi de Cauchy

Injecter une onde plane $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ nous donne une relation de dispersion :

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\epsilon_r}{c^2} \omega^2$$

Rappelons-nous la définition de $\epsilon_r = 1 + \chi_E = 1 + \chi_E$. Avec le modèle de l'électron élastiquement lié, nous avons trouvé un $\chi_E \in \mathbb{C}$. Ainsi, dans un cas général, $\epsilon_r \in \mathbb{C}$, ce qui implique un vecteur d'onde complexe, on note alors $\mathbf{k} = (k' - ik'')\mathbf{u}$ dont les parties réelle et imaginaire sont reliées à celles de ϵ_r . Ces relations ne seront pas étudiées en détail mais il est évident que l'existence de ϵ_r'' implique l'existence de k'' .

Ainsi, une onde plane pourra s'écrire comme :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}$$

On voit apparaître un terme d'amplitude : la partie imaginaire du vecteur d'onde est responsable de l'atténuation de l'onde dans le milieu (diminution de son amplitude). Cette dernière interagit avec la matière et mais ne lui cède pas d'énergie ! On dit de cette onde qu'elle est **évanescence** : elle se propage en s'atténuant, mais sa puissance est nulle en moyenne.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} n'' \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n' \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}$$

La partie réelle du vecteur d'onde, permet la propagation de l'onde. C'est à elle qu'on doit s'intéresser lorsque les propriétés de dispersion : On définit la vitesse de phase \mathbf{v}_φ et la vitesse de groupe \mathbf{v}_g :

$$\mathbf{v}_\varphi = \frac{\omega}{\mathbf{k}'} = \frac{c}{n'}$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}'} = \frac{c}{n' + \omega \frac{dn'}{d\omega}}$$

Ainsi, une dépendance de n' en fréquence, implique que le milieu est **dispersif** : chaque fréquence a sa propre vitesse de groupe et un paquet d'onde serait déformé par propagation dans ce milieu.

Si on se place en dehors du domaine d'absorption, loin de ω_0 , on a $n'' = 0$ et $n' = n$, tout se passe comme si n , χ_E et ϵ_r étaient réels. On retrouve la notion de d'indice optique.

On a alors, en notant $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}}$ la pulsation plasma :

$$n'^2 - 1 = \chi'_E = \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2/\tau^2} \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Après DL en $\frac{\omega}{\omega_0}$, il vient

$$n' \simeq 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

On retrouve la loi de Cauchy ! Dans le visible ça donne $n(\lambda) = 1 + 1.36 \cdot 10^{-4} + \frac{1.06 \cdot 10^{-18}}{\lambda^2}$. Le λ_0 trouvé est de 88 nm, donc loin du visible, et l'approx est bonne.

| Mais dans la pseudo-OPPS, à quoi correspond k'' ?

2.3 Absorption : loi de Beer-Lambert

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}'' \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{\omega}{c} n'' \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c} n' \mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}$$

On voit apparaître un terme d'amplitude : la partie imaginaire du vecteur d'onde est responsable de l'atténuation de l'onde dans le milieu (diminution de son amplitude). Cette dernière interagit avec la matière et mais ne lui cède pas d'énergie ! On dit de cette onde qu'elle est **évanescence** : elle se propage en s'atténuant, mais sa puissance est nulle en moyenne.

Soit une onde EM en 1D qui pénètre dans une DLHI dilué (milieu absorbant) de longueur d On note $E = E_0 e^{-k'' x} e^{i(\omega t - k' x)}$. On peut calculer les intensités avant et après le DLHI :

$$I_{av} = \langle \mathbf{\Pi}_{av} \rangle = 1/2 \epsilon_0 c n' E_0^2 \quad (2.6)$$

$$I_{ap} = \langle \mathbf{\Pi}_{ap} \rangle = 1/2 \epsilon_0 c n' E_0^2 e^{-2k'' d} \quad (2.7)$$

On a alors $I_{ap} = I_{av} e^{-2k'' d}$ -> loi de Beer-Lambert !

Pour s'assurer que cette onde est bien une onde absorbée, on peut calculer la puissance cédée au milieu et montrer qu'elle dépend linéairement de χ''_E que l'on sait reliée à n'' .

$$P_d = \langle \vec{j}_{liées} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j}_{liées} \cdot \vec{E}^*)$$

$$\vec{j}_{liées} = j \omega \vec{P} = j \omega \epsilon_0 (\chi_1 - j \chi_2) \vec{E}$$

$$P_d = \frac{1}{2} \omega \epsilon_0 \chi_2 E_0^2$$

Application au micro-onde :
Micro-onde : envoyer des ondes EM dans de l'eau liquide pour lui fournir de l'énergie : on envoie à la

pulsation de résonance de l'eau. Déterminons là!

L'eau est composée de moments dipolaires permanents qui vont ici s'orienter avec le champ : c'est la **polarisabilité d'orientation**. On peut montrer que le vecteur polarisation \mathbf{P} obéit à l'équation suivante, avec pour l'eau $\tau = 1.5 \cdot 10^{-10}$ s et $\chi_0 = 79$ U.S.I.

$$\tau \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_0 \mathbf{E} \quad (2.8)$$

On définit alors $\chi_E = \frac{\chi_0}{1+i\omega\tau}$ et on peut alors trouver la fréquence recherchée qui va maximiser χ_E'' et donc n'' l'indice d'absorption.

On a $\chi_E'' = \chi_0 \frac{\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}$ qui est maximum pour une pulsation $\omega_0 = 2\pi\nu_0$ avec $\nu_0 = 3$ GHz.

Conclusion

Ainsi, nous avons remarqué que le terme responsable était k'' directement lié à n'' qui possède une résonance à ω_0 , on peut maintenant expliquer les observations de la vapeur de sodium!

Ouverture sur les milieux diélectriques anisotropes (biréfringence toussa toussa)

Questions

Ton hypothèse sur les milieux dilués tu peux la concrétiser ? Le verre c'est un milieu dilué ?
Ce sont principalement des gaz, cf. valeurs données

Pourtant ça a l'air de bien marcher avec le verre (dispersion), dans quelle mesure ça marche ? (domaine de fréquences...)

La polarisabilité ionique (uniquement présente dans les solides) intervient dans l'IR

Et à haute fréquence, ça marche encore ?

Déjà pour des questions d'inerties, on se rend compte que ça foire... Et cela implique des petites longueurs d'onde donc une plus grande susceptibilité à la granulosité.

Quel est le cadre de définition de la polarisation (comme dérivée volumique du moment dipolaire) ?

Cela suppose l'existence d'une échelle mésoscopique.

Je pense qu'il faut distinguer les cas dilués et non dilués, quels sont dans chaque cas les distances mésoscopiques ?

Pour le gaz, on regarde le libre parcours moyen, alors que dans le verre, c'est plutôt la distance entre les atomes qui nous intéresse.

Y a pas d'autres hypothèses, au niveau des fréquences... ?

Plus la longueur d'onde est faible, moins les longueurs mésoscopiques sont définies.

Quels ordres de grandeur tu pourrais comparer ?

La taille caractéristique mésoscopique et la longueur d'onde.

C'est quoi la distance typique entre deux particules dans un solide ?

La centaine de pm

Donc le domaine de validité de la définition de \mathbf{P} dans un solide ?

Montre nous que $\mathbf{j}_{\text{lies}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$

Cf. plus haut, c'est juste que Colléaux l'a pas dit en leçon (ouais le manque de temps ouais...)

On remarque que ϵ_r d'un solide est entre celui d'un gaz et celui d'un liquide... T'as une explication avec les mains ?

Faut prendre en compte les différentes sources de polarisabilité et la pulsation...

Ça veut dire quoi "dans le domaine de Fourier" ?

La relation constitutive entre \mathbf{P} et \mathbf{E} ne s'écrit que pour les transformées de Fourier, cela revient à dire qu'elle n'est valable qu'à une fréquence donnée. Elle n'est pas du tout vraie pour tout t ni pour un rayonnement polychromatique !

Est-ce que avec le modèle introduit, tu peux nous expliquer ce qu'il se passe microscopiquement dans un condensateur... Pour commencer, c'est quoi un condensateur ? Comment est modifiée la capacité avec un diélectrique ?

Un condensateur c'est deux surfaces chargées en regard séparées par un isolant (air ou diélectrique). On a $C = \epsilon_0 S/l$ dans le vide et $C = \epsilon_0 \epsilon_r S/l$

Pour le modèle de l'électron élastiquement lié, tu peux nous donner des domaines de validité ?

La force de rappel est juste phénoménologique (pour rendre compte de la résonance)

L'air c'est un diélectrique ? T'as d'autres exemples de diélectrique gazeux ?

Un plasma. Ça nous donne également le comportement à haute fréquence.

Tu connais un exemple de polarisation d'orientation, très utilisé pour les capteurs ?

Les piezo.

C'est quoi la première mise en évidence historique des propriétés diélectriques ? Pourquoi on a commencé à étudier ça ?

Pour les condensateurs.

Comment établir autrement la relation $\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$? *↳ Feynmann électromagnétisme 1*

Faut considérer un volume élémentaire et regarder ce qui rentre et ce qui sort, même idée pour $\rho = \text{div } \mathbf{P}$

Comment modifier la relation de structure si le milieu n'est pas linéaire ?

Une décomposition en rajoutant des termes en \mathbf{E}^2 , \mathbf{E}^3 ...

Quelle propriété émerge si le milieu n'est pas isotrope ?

Biréfringence.

Qu'est-ce qu'il se passe au passage d'un diélectrique à un autre

Réfraction, réflexion, polarisation (BREWSTER)

Quelles composantes sont continues.

Les composantes normales de \mathbf{D} et \mathbf{B} alors que c'est les composantes tangentielles de \mathbf{E} et \mathbf{H} .

Comment mesurer ϵ_r de l'eau à basse fréquence ? À quoi est-ce sensible ?

Avec un condensateur. Attention aux impuretés qui changent drastiquement cette valeur (impuretés souvent des ions donc la polarisation part en couille), on ne peut espérer qu'obtenir un ordre de grandeur.

Pourquoi les électrons sont accélérés dans le modèle de l'électron élastiquement lié ? (terme de frottement vient du rayonnement)

Mouvement circulaire donc accélération centripète. Sinon τ représente le temps de vie de l'électron dans un niveau excité.

Le facteur de qualité on le voit où spectralement ?

Largeur de la raie.

Commentaires

- Une petite expérience ça n'aurait pas mangé de pain
 - / J'avais pensé au condensateur d'Aepinus, mais pas le temps
 - / On aurait pu penser également à l'absorption... En fait c'est dommage de voir les courbes expérimentales à la fin.

- C'est sûr qu'il faut faire des choix... On aurait pu rétrécir la première partie (bien qu'elle soit indispensable!)
 - / Je voyais où mettre le niveau de pré-requis...
 - / Sinon toute la partie où on retrouve n et \mathbf{k} aurait pu être plus rapide.
- Ça manque de schémas pour l'électron élastiquement lié
- Pas assez de motivation pour introduire les milieux diélectriques (donner des exemples dès l'intro). Typiquement le diagramme d'absorption de l'eau est plutôt saisissant.