

LP23 - Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

Cléments COLLÉAUX et DE LA SALLE

21 mars 2020

Niveau : L2

Bibliographie

⚡ H Prépa Onde 2e →

⚡ Physique tout-en-un MP MP* →

Prérequis

> Être Plat 2 minimum

Expériences



Table des matières

Table des matières	1
1 Cadre de la conduction	2
1.1 Modèle de Drude et loi d'Ohm locale	2
1.2 Électroneutralité	2
1.3 ARQS	3
2 Limite des basses fréquences : les métaux	4
2.1 Marion la mise en équation	4
2.2 Marion la résolution (oui elles sont soeurs)	4
2.3 Marion les applications (j'ai plus d'inspi)	5
3 Limite des hautes fréquences : plasma	6
3.1 Mise en équation	6
3.2 Relation de KLEIN-GORDON	7

Introduction

1 Cadre de la conduction

Commençons par le commencement :

Définition : Conducteur

Un conducteur est matériaux dans lequel des porteurs de charge sont libres

Exemples

Les métaux sont de très bons conducteurs : lorsqu'on leur applique un champ électrique, les charges libres se mettent à bouger et un courant apparaît. On peut citer également les plasmas...

En gros un conducteur, c'est un matériaux qui va présenter un courant lorsqu'on lui applique un champ électrique.

| Voyons comment modéliser tout ça

1.1 Modèle de Drude et loi d'Ohm locale

Pour le modèle de DRUDE, on ira jeter un oeil à la leçon 47. On a déjà tout bien détaillé.

Définition : Conductivité

On peut alors relier la densité volumique de courant \mathbf{j} au champ imposé \mathbf{E} à travers la conductivité σ :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Cette relation, connue sous le nom de **loi d'Ohm locale**, est caractéristiques des milieux conducteurs.

On obtient une expression de la conductivité :

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \quad \sigma_0 = \frac{n e^2 \tau}{m}$$

Remarque

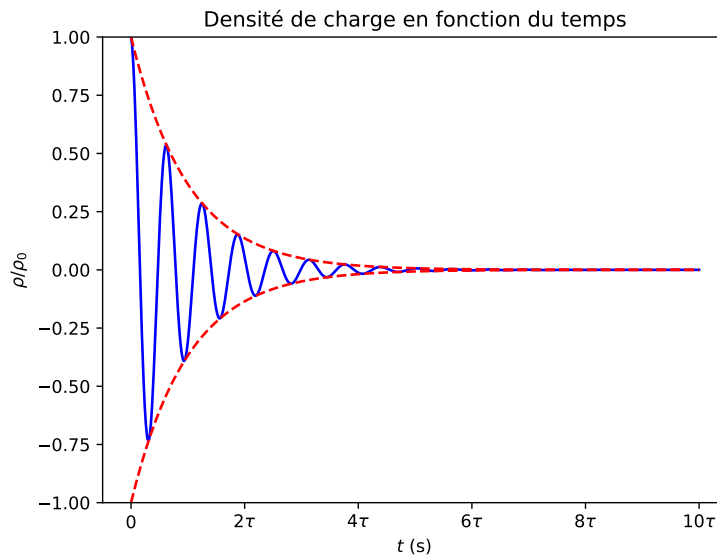
La conductivité dépend de la fréquence d'excitation... La suite de la leçon consistera à envisager chacun des cas extrême (faible et grande pulsation)

1.2 Électroneutralité

Bien qu'un courant circule dans le métal, on sait qu'il n'est pas chargé... Mais d'où vient ce caractère neutre? Si on créer localement un excès de charge, comment va il disparaître? Pour le savoir, écrivons la conservation de la charge :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} \\
0 &= i\omega \rho + \frac{\sigma_0}{1 + i\omega\tau} \operatorname{div} \mathbf{E} \\
0 &= i\omega(1 + i\omega\tau) + \sigma_0 \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
0 &= \left(-\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0\tau} \right) \rho
\end{aligned}$$

On retrouve une équation différentielle du second degré dans laquelle τ apparaît comme le **temps de relaxation**, c'est-à-dire le temps caractéristique pendant lequel l'excès de charge se neutralise. Pendant ce temps, la charge suit des oscillations ($Q \sim 100$) de moins en moins intense (cf.courbe).



Pour faire l'hypothèse d'électronéutralité, il faut donc se placer à $\omega\tau \ll 1$, c-à-d numériquement, $\omega \ll \omega_{EN} \sim 10^{-14} \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

1.3 ARQS

Une autre hypothèse qui pourrait nous être utile, c'est celle de l'ARQS, qui consiste en fait à négliger le courant de déplacement dans l'équation de MAXWELL-AMPÈRE :

$$\xi = \frac{||\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}||}{||\mu_0 \mathbf{j}||} \sim \frac{\epsilon_0 \omega}{|\sigma|}$$

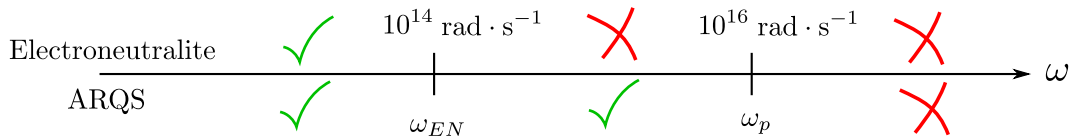
On voit alors que pour négliger le courant de déplacement ($\xi \ll 1$), il faut une pulsation pas trop grande... Alors faisons l'hypothèse qui nous arrange le moins pour être sûr : prenons $\omega\tau \gg 1$. Dans ce cas,

$$\xi = \frac{\epsilon_0 \omega^2 \tau}{\sigma_0} = \frac{\omega^2}{\omega_p^2}$$

On fait alors intervenir une pulsation caractéristique du matériaux, appelée **pulsation plasma** :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$$

Alors l'hypothèse de l'ARQS n'est vérifiée que pour $\omega \ll \omega_p \sim 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui est moins contraignant que l'électronéutralité : on perd toujours l'électronéutralité avant l'ARQS



2 Limite des basses fréquences : les métaux

2.1 Marion la mise en équation

Selon la forme trouvée pour la conductivité $\underline{\sigma}(\omega) = \frac{\sigma_0}{1+i\omega\tau}$, on a dans la limite des Basses Fréquences (BF) $\omega\tau \ll 1$. Avec $\tau \simeq 10^{-14}$, cela correspond à $\omega \ll 10^{12} \text{ rad/s}$, donc une condition facilement vérifiée. L'étude que nous allons faire n'est donc pas uniquement théorique. On retrouve aussi la condition de l'EN et de l'ARQS.

Une première remarque est qu'on a $\underline{\sigma}(\omega) = \sigma_0$. Il n'y a plus de dépendance en ω . La loi d'Ohm locale peut donc s'écrire directement dans l'espace temporel $\mathbf{j} = \sigma_0 \mathbf{E}$. Les équations de Maxwell s'écrivent donc, dans le cadre des BF,

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E} &= 0 & (\text{EN}) \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 \sigma_0 \mathbf{E} & (\text{ARQS}) \end{aligned}$$

En invoquant le **rot rot**-tout puissant, on obtient l'équation qui régit \mathbf{E} :

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \sigma_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Ce n'est plus une équation de d'Alembert mais une équation de diffusion! :o

▮ *Tâchons de résoudre cette équation de diffusion pour voir ce qu'elle a à nous dire!*

2.2 Marion la résolution (oui elles sont soeurs)

On se place dans le cadre d'une OPPH/OPPS/OPPM transverse qui se propage selon l'axe z et qui rencontre l'interface air/métal en $z = 0$. En notation complexe, on a :

$$\underline{\mathbf{E}}(z, t) = \underline{E}(z) e^{i\omega t} \mathbf{u}_x$$

On injecte cette expression de $\underline{\mathbf{E}}$ dans l'équation de diffusion et on obtient l'équation suivante sur $\underline{E}(z)$:

$$\frac{d\underline{E}}{dz} = i\omega\mu_0\sigma_0\underline{E}(z)$$

dont les solutions sont :

$$\underline{E}(z) = A \exp \left[+(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}} z \right] + B \exp \left[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma_0}{2}} z \right]$$

Il faut maintenant interroger les conditions aux limites qui interdisent la divergence en $z \rightarrow +\infty$ et impliquent $\underline{\mathbf{E}} = E_0 e^{i\omega t} \mathbf{u}_x$: $A = 0$ et $B = E_0$. On a alors l'expression finale du champ électrique, en notation réelle :

$$\underline{\mathbf{E}} = E_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \mathbf{u}_x$$

où on a noté $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma_0}}$ l'épaisseur de peau. Son interprétation est simple, il s'agit d'une longueur caractéristique de pénétration de l'onde dans le métal, on considère qu'à partir de $z \simeq 5\delta$ l'onde est nulle. On a donc une onde **pseudo-progressive** (et non pas évanescence car il y a quand même de la propagation) dont l'amplitude est atténuée lors de sa propagation.

Le modèle du métal parfait (conductivité électrique infinie, neutre et champ électrique nul à l'intérieur) correspond donc à la limite $\delta \rightarrow 0$ du métal réel. Mathématiquement on voit bien que $\sigma_0 \rightarrow \infty \Leftrightarrow \delta \rightarrow 0$. Physiquement, comme δ représente la longueur de pénétration de l'onde dans le métal, alors $\delta \rightarrow 0$ correspond à une situation où le champ électrique ne pénètre jamais dans le métal, d'où un métal parfait.

2.3 Marion les applications (j'ai plus d'inspi)

1^e application : cas du courant dans un fil de cuivre $\sigma_0 \simeq 10^7$ S/m, de diamètre $a = 0.5$ mm. Le courant électrique ne circule que dans la partie du câble où le champ électrique est non-nul, ce qui correspond à l'épaisseur de peau.

- $f = 50$ kHz $\implies \delta = 9.8$ mm $\gg a$, l'atténuation avec l'effet de peau n'est pas visible
- $f = 100$ kHz $\implies \delta = 0.2$ mm, on est à la limite d'uniformité
- $f = 100$ MHz $\implies \delta = 6.6$ μ m, le courant circule sur une épaisseur très faible du câble

Dans ce dernier cas, comme la section effectivement traversée par le courant change $S = \pi a^2 \rightarrow S' = 2\pi a\delta \ll S$, alors la résistance du câble change aussi : $R' = \frac{L}{\sigma_0 S'} \gg R$. L'effet de peau augmente la résistance d'un fil à haute fréquence, ce qui accentue l'effet Joule notamment. La résistance est proportionnelle à $1/\delta$, elle est donc proportionnelle à $\sqrt{\omega}$, cette dépendance caractérise les pertes Fer aux FB.

2^e application : isolation des parois d'un micro-onde. Dans un micro-onde, les ondes utilisées ont une fréquence de l'ordre de $f \simeq 10^5$ Hz, donc $\delta \simeq 10$ μ m. En pratique, les parois métalliques du micro-onde sont donc largement assez épaisses pour isoler l'extérieur de l'appareil. Seul problème, la paroi vitrée qui n'est pas métallique et pour laquelle l'effet de peau n'existe pas. L'isolation de cette paroi est réalisée avec un grillage métallique aux mailles suffisamment fines pour stopper les ondes EM.

3 Limite des hautes fréquences : plasma

3.1 Mise en équation

Ici on considère systématiquement des ondes planes progressives de la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

Ceci nous permet de passer des équations en t aux équations en ω sans scrupule... Mais pour rester prudent, il vaut mieux choisir un domaine et s'y coller ! (le domaine de ω c'est mieux vu que le but est de retrouver l'équation de dispersion).

Selon la forme trouvée pour la conductivité, lorsqu'on se place à haute fréquence $\omega\tau \gg 1$, on remarque

$$\sigma = \frac{ne^2\tau/m}{1 + i\omega\tau} \underset{\omega\tau \gg 1}{\sim} -i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}$$

On retrouve la pulsation plasma définie comme

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$$

Remarques

On observe que tout se passe comme si on avait oublié le terme de frottement dans le modèle de DRUDE. En effet, avec une pulsation très grande, le régime stationnaire n'a pas le temps de se mettre en place, le terme inertiel est donc dominant.

Puisque l'on compare ω à $1/\tau$ (rappel : τ peut être vu comme temps de relaxation typique pour l'électronneutralité), c'est bien l'hypothèse d'électronneutralité qui est mise à défaut ! On ne pourra donc a priori pas utiliser MAXWELL-GAUSS... Pour s'en sortir, on peut soit

- Choisir d'écrire les équations pour \mathbf{B} puisque MAXWELL-THOMPSON est toujours vrai
- Considérer uniquement des ondes transverses, pour lesquelles $\text{div } \mathbf{E} = 0$
- Faire l'annulation le développement suivant : L'équation de conservation de la charge s'écrit

$$0 = i\omega\rho + \text{div } \mathbf{j}$$

$$0 = i\omega\rho - i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \text{div } \mathbf{E}$$

$$\implies 0 = (\omega^2 - \omega_p^2)\rho$$

Ce qui implique $\rho = 0$, à moins que l'on est $\omega = \omega_p$, mais bon au pire fuck.

La relation d'OHM devient alors

$$\mathbf{j} = -i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \mathbf{E} \implies \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \epsilon_0 \omega_p^2 \mathbf{E}$$

Bref, faisons la troisième méthode, alors les équations sont les suivantes (sachant qu'on n'a aucune raison de se placer dans l'ARQS) :

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{E} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Remarque bonus

On peut s'intéresser à la puissance volumique dissipée dans le milieu :

$$\mathcal{P} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$$

Or puisque \mathbf{j} et \mathbf{E} sont en quadrature de phase (σ imaginaire pur), alors en moyenne, il n'y a pas de puissance échangée :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = 0$$

3.2 Relation de KLEIN-GORDON

On fait comme d'hab avec **rot rot E** et on trouve alors l'équation suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{E} = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \mathbf{E}$$

Qui donne une relation de dispersion suivante :

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

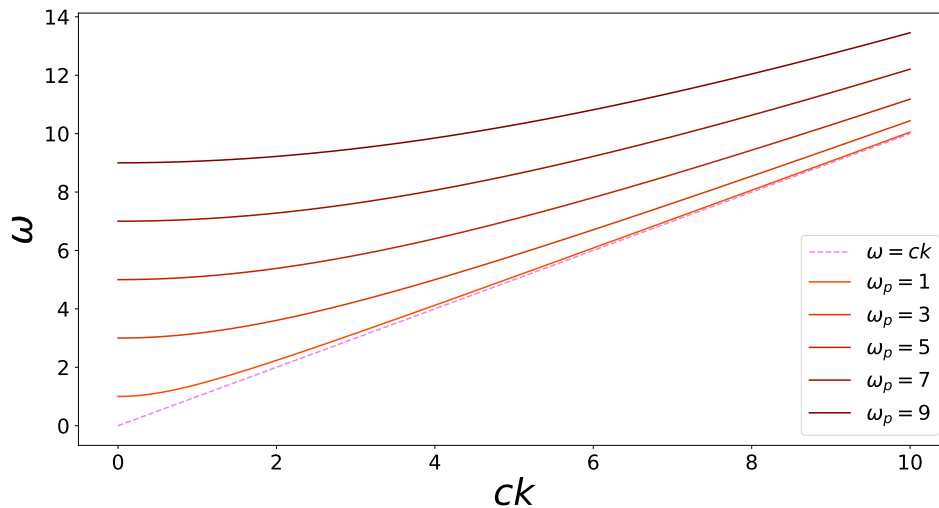
On distingue alors naturellement deux cas :

$\omega > \omega_p$ Dans ce cas, \mathbf{k} est réel et ainsi, vu la tête de l'onde plane qu'on a choisit, ça veut juste dire qu'on a propagation (dispersive) avec

$$\omega = \sqrt{\omega_p^2 + (ck)^2}$$

On parle de dispersion, puisqu'en effet, la vitesse de phase n'est pas égale à la vitesse de groupe. On remarque que pour ω qui devient vraiment grand, la relation revient à quelque chose de non dispersif (cf. plot ci-dessus). On peut même s'amuser à faire tourner le programme "dispersion.py" en lançant le paquet A dans les "petits exemples".

$\omega < \omega_p$ Ceci implique que \mathbf{k} est imaginaire pur, donc il n'y a **plus de propagation, mais seulement de l'atténuation**. On parle d'**onde evanescente**. L'énergie ne se propage plus (le vecteur de POYNTING est de moyenne nulle). Ainsi pour des raisons énergétiques, il y a réflexion totale



Application

En radio, on communique parfois à des "basses fréquences" (200 kHz pour RTL). Ces fréquences se réfléchissent sur l'ionosphère, assimilable à un plasma, de coupure 10 MHz. Par contre Radio France communique justement à environ 10 MHz, ce qui fait que les ondes peuvent traverser l'ionosphère sans trop être réfléchies.