

LP30 - Rayonnement dipolaire

Cléments (COLLÉAUX + DE LA SALLE)

12 juin 2020

Niveau : L3

Bibliographie

- ↗ Électromagnétisme, Pérez →
- ↗ Cap Prépa PC/PC* →
- ↗ Physique tout-en-un, MP/MP* → Chap. 21
- ↗ *Électromagnétisme Ed.1, Gardiol* → Je me suis paumé sur ScholarVox et c'est le seul que j'ai trouvé qui fait les antennes (Chap. 9)

Prérequis

- > Dipôles en électrostatique
- > Potentiel vecteur

Expériences



Table des matières

Table des matières	1
1 Dipôle électrique rayonnant	2
1.1 Potentiel vecteur	2
1.2 Champs électrique et magnétique	3
1.3 Vecteur de POYNTING	4
2 Applications à la matière	4
2.1 Un modèle simple : l'électron élastiquement lié	5
2.2 Diffusion de RAYLEIGH	5

Introduction

Dans les petites classes, on a vu déjà parler des dipôles électrostatiques... Le but est de passer au level supérieur avec la notion de dipôle en électrodynamique!

Le but sera de faire des calculs puis de parler de trucs sympa... en gros on a le choix entre

- Les antennes
- La diffusion de RAYLEIGH

Moi je préfère RAYLEIGH perso, mais l'idée c'est que le sujet non traité doit-être évoqué en ouverture pour que le jury puisse partir dessus (donc faut être callé sur tout!)

1 Dipôle électrique rayonnant

Cette partie est calculatoire, mais a-t-on vraiment le choix? On va essayer de faire proprement les premiers calculs afin d'aller plus vite sur la fin pour parler de trucs cools...

1.1 Potentiel vecteur

Dans les cours de L2 sur les dipôles, on est en statique... Donc il suffit d'écrire que

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V$$

. Maintenant, on essaye de décrire ce qu'il se passe si on fait bouger tout ça! Ainsi les calculs se font simplement à partir du **potentiel vecteur A**

Hypothèses

On considère une distribution \mathcal{D} de charges q_i en mouvement $(\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i)$ et de taille typique a . On s'intéresse au potentiel vecteur créé par cette distribution à une distance r et on fait les hypothèses suivantes :

1. Les charges sont non relativistes
2. On se place suffisamment loin : approximation dipolaire
3. L'information circule instantanément dans la distribution : ARQS de la source

La première hypothèse nous permet d'écrire directement que (pour des charges dénombrables)

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{P} \in \mathcal{D}} \frac{\mathbf{j}(\mathcal{P}, t - \frac{\|\mathbf{PM}\|}{c})}{\mathbf{PM}} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i q_i \frac{\mathbf{v}_i \left(t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}{c} \right)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|}$$

Les hypothèses 2 et 3, nous permet de remplacer les $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|$ par des $\|\mathbf{r}\| = r$ (l'hypothèse 3 pour la dépendance de \mathbf{j})

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i q_i \mathbf{v}_i \left(\mathbf{t} - \frac{\mathbf{r}}{c} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i q_i \mathbf{v}_i (\mathbf{t}')$$

Avec $t' = t - \frac{r}{c}$. Alors on peut faire apparaître le moment dipolaire électrique \mathbf{p} :

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}}{r} \quad \mathbf{p}(t') = \sum_i q_i \mathbf{r}_i = \iiint \rho(\mathbf{r}, t') \mathbf{r}' d^3r'$$

1.2 Champs électrique et magnétique

On accède tout d'abord au champ magnétique, prenons un dipôle oscillant dans la direction \mathbf{e}_z :

$$\mathbf{p}(t') = p(t') \mathbf{e}_z \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt'}$$

Alors par définition, en coordonnées sphériques :

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \mathbf{e}_\varphi$$

Avec $r^2 = z^2 + \rho^2$ et aussi $\sin \theta = \frac{\rho}{r} = \frac{\partial r}{\partial \rho}$, alors :

$$\frac{\partial \dot{p}}{\partial \rho} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial r} \sin \theta = -\frac{1}{c} \ddot{p} \sin \theta$$

On a alors l'expression finale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{p}}{cr} + \frac{\dot{p}}{r^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$$

On peut alors de même calculer le champ électrique \mathbf{E} à partir de MAXWELL-FARADAY... Bon là on arrête les calculs !

Dans le cadres de cette leçon, on ne s'intéresse qu'au terme de champ lointain (**zone de rayonnement** $a \ll c\tau \ll r$). Les expressions des champs sont alors :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{p}}{r} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\ddot{p}}{r} \sin \theta \mathbf{e}_\varphi$$

Remarques

- Les champs varient lentement en $1/r$ contrairement au champ dipolaire électrostatique qui est en $1/r^3$ et au champ électrostatique d'une charge ponctuelle en $1/r^2$.
- Ces termes n'existent que si si le dipôle est accéléré ($\ddot{p} \neq 0$)
- La distribution des champ est très anisotrope, en particulier il n'y a aucun champ rayonné suivant l'axe du dipôle $\theta = 0$ (faire un schéma de l'amplitude de \mathbf{E})
- L'onde électromagnétique est polarisée (important pour RAYLEIGH!)
- Le champ électromagnétique a localement une structure d'onde plane (ce qui nous amène à définir du POYNTING!)
- On peut aussi se placer dans la **zone de champ proche** $a \ll r \ll c\tau$, il y a un compromis entre l'approximation dipolaire et le champ proche. Mais pour des variations des sources suffisamment lentes (τ grand) cette zone existe bien. Dans cette zone, on a :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t) \times \mathbf{e}_r}{r^2} \quad \mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}(t) \cdot \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r - \mathbf{p}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r$$

On retrouve alors l'expression dipolaire sans retard (dépendance en t et plus en t') avec la décroissance en $1/r^2$ ainsi que les deux termes (monopôle et dipôle) dans le champ électrique.

1.3 Vecteur de POYNTING

Vu la tronche en *onde plane like* :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}$$

On peut définir un vecteur de POYNTING :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 c \mathbf{E}^2 \mathbf{e}_r = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{\ddot{p} \sin \theta}{r} \right)^2$$

Alors si on prend un dipôle excité sinusoïdalement, $p(t') = p_0 \sin \omega t'$, la puissance surfacique rayonnée est

$$\langle \|\mathbf{\Pi}\| \rangle = \frac{p_0^2 \sin^2 \theta}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \omega^4$$

Important

- La puissance rayonnée est en ω^4 , donc que les hautes fréquences vont plus loin...
- Il n'y a aucune énergie rayonnée dans la direction du dipôle
- L'énergie est maximale dans le plan orthogonal au dipôle (faire un schéma)

2 Applications à la matière

Le but va être ici d'expliquer les couleurs du ciel, ainsi que la polarisation apparente de la lumière du ciel (alors que le Soleil envoie des ondes pas polarisées du tout!). **Donc avant de se lancer dans des modèles, expliquer rapidement le lien avec les dipôles!!!** : le Soleil envoie des ondes EM qui excitent les molécules de l'atmosphère qui se comportent comme des dipôles (cf. ce qui suit). Celles-ci réémettent, comme on vient de le voir, de la lumière et c'est ça que l'on voit le jour. Ce phénomène est appelé **diffusion de RAYLEIGH**.

Expérience : Diffusion de RAY-LAIT

🔗 Sextant, p.273

⌚ 5 min

On éclaire une cuve avec du lait, et patati et patata, tout est bien détaillé dans le *Sextant*... Au pire si ça marche pas, cette vidéo est très belle (OU SI Y A PAS DE MANIPULATION LOL) :

<https://youtu.be/uLDMT6EBwk0?t=263> Pour la visualisation des couleurs, cette vidéo est légèrement mieux :

<https://youtu.be/ge6MFvV8m3U?t=28>

2.1 Un modèle simple : l'électron élastiquement lié

Hypothèses

On considère un atome d'hydrogène dont on modélise l'évolution avec les hypothèses suivantes (on n'est pas obligé de tout détailler si le temps vient à manquer... Limite on met ce modèle en pré-requis!) :

1. Le noyau (un proton) est fixe. Ceci se justifie par sa masse 1000 fois plus élevée que celle de l'électron.
2. L'électron subit une force de rappel vers le noyau (modélisation de l'interaction Coulombienne purement empirique) $-m\omega_0^2\mathbf{r}$ dont la forme se retrouve avec le modèle de THOMPSON. Typiquement, les électrons dans l'atmosphère vibrent avec une fréquence $\nu_0 \sim 10^{17}$ Hz (UV)
3. L'électron accéléré rayonne de l'énergie, cette perte se traduit par la présence d'un terme de frottement fluide $-m\dot{\mathbf{r}}/\tau$ avec $\tau \sim 10^{-8}$ s. On pourra vérifier à la fin que le terme ω/τ est bien négligeable.
4. Le champ électrique extérieur est uniforme à l'échelle de l'atome
5. On note \mathbf{r} le vecteur reliant le barycentre des charges $+$ à l'électron.

On peut alors écrire son PFD dans le domaine de FOURIER :

$$-m\omega^2\mathbf{r} = -m\omega_0^2\mathbf{r} + i\frac{m\omega}{\tau}\mathbf{r} - e\mathbf{E}$$

Et on accède alors à son moment dipolaire :

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau} \mathbf{E}$$

OG

Suivant la gamme de ω , on se situe dans plusieurs régime. Celui qui nous intéresse est le **régime de RAYLEIGH** dans lequel ($\omega_0^2 \gg \omega^2$).

- C'est le cas dans l'atmosphère, où $\omega_0 \sim 10^{18}$ rad \cdot s $^{-1}$ alors que pour des ondes visibles, $\omega \sim 10^{18}$ rad \cdot s $^{-1}$
- Le terme de frottement est lui aussi négligeable vu que $1/\tau \sim 10^8$ rad \cdot s $^{-1} \ll \omega_0$

Donc dans le cadre de l'étude l'atmosphère, on retient seulement que

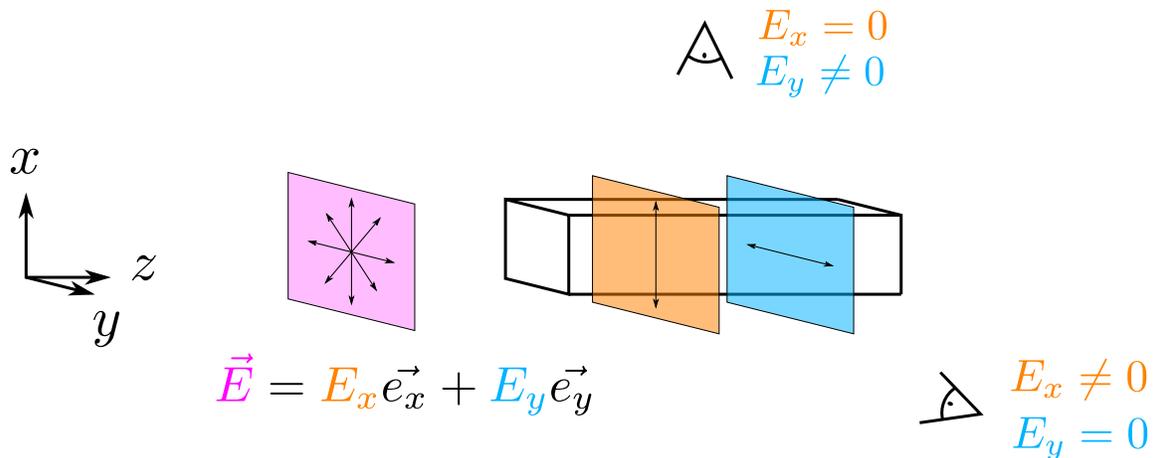
$$\mathbf{p}(t) = \alpha\mathbf{E}(t) \quad \alpha = \frac{e^2}{m\omega_0^2}$$

Où le coefficient α est appelé **polarisabilité**

2.2 Diffusion de RAYLEIGH

Maintenant on se fait plaisir et on essaye d'expliquer ce qu'on a vu :

- **Le ciel est bleu** (la lumière est bleue au début de la cuve) :
Puisque la lumière est diffusée en ω^4 , les hautes fréquences sont diffusées avec plus d'intensité et donc le bleu sort mieux que le rouge... Mais alors on devrait voir du violet!? Oui mais non parce que
 1. Vu le spectre du Soleil, celui-ci envoie plus de bleu que de violet
 2. L'oeil humain est également moins sensible à la lumière violette
- **Mais le ciel devient orangé au coucher du Soleil** (la lumière se réchauffe à mesure qu'on avance dans la cuve) :
Puisque le bleu diffuse plus fortement au début, le spectre de la lumière incidente perd petit à petit ses hautes fréquences et visuellement, on la voit donc rougir. Au coucher du Soleil, la lumière est rasante donc parcourt une plus grande distance dans l'atmosphère avec de nous parvenir.
- **La lumière est partiellement polarisée** :
Il faut revenir à la forme du champ électrique donné en début de leçon... On remarque que dans le plan d'intensité maximale $\theta = \pi/2$, le champ \mathbf{E} est parallèle au dipôle : $\mathbf{e}_\theta(\theta = \pi/2) \parallel \mathbf{p}$. Ainsi si une onde plane se propage suivant z , le champ \mathbf{E} est dans le plan xy . Si on excite un dipôle selon x , la lumière qu'il va diffuser sera polarisée aussi suivant x . Donc regarder dans la direction y garantie que (puisque la lumière provient essentiellement des dipôles excités suivant x) la lumière diffusée est polarisée suivant x !
De même dans le ciel, on retrouve ce phénomène bien connu des photographes : suivant la position du soleil, le ciel peut être partiellement polarisé. Il est donc possible de l'assombrir sur les photos à l'aide d'un analyseur.



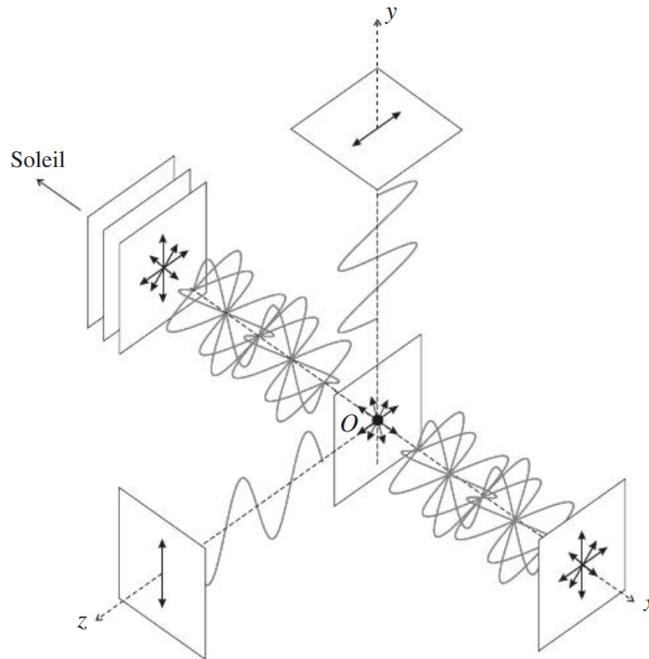
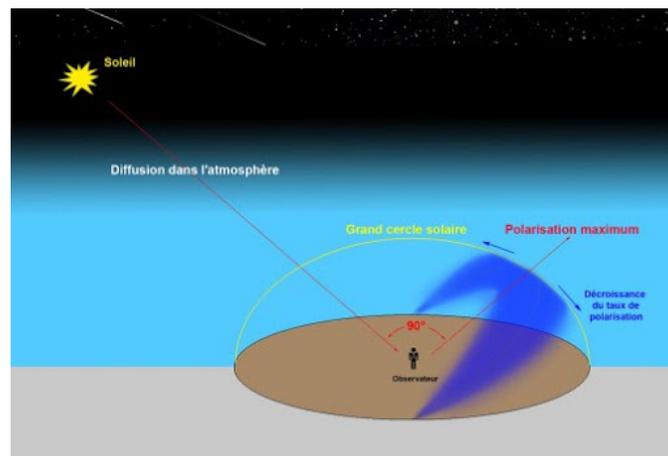


FIGURE 2.1 – Autre façon de voir les choses (tiré du [📖 J'intègre MP](#))



Conclusion

Oh bah on n'a pas parlé des antennes... Posez-moi des questions dessus :) [📖 Gardiol chap.9](#)

Questions

Vous avez parlé de la jauge de Lorentz, pourquoi celle là ?

Qu'est ce qui change si on considère une distribution de charges pas neutre ?

Comment rendre des antennes très directives ? J'ai fait l'expérience de la polarisation par

diffusion/coucher de Soleil avec un tube de Cachan très pratique : dans l'expérience, l'extinction n'est pas totale, pourquoi ?

Pouvez-vous expliquer avec les mains pourquoi la puissance rayonnée dépend de l'accélération et pas de la vitesse par exemple ?

Modèle de l'électron élastiquement lié : vous avez pris une force de frottements type Stokes : quelle en est l'origine ?

Est-ce que l'expression est adaptée au phénomène ?