Dérivées partielles

I Fonctions à plusieurs variables

Cette année, nous allons être amené · es à étudier de plus en plus de **fonctions à plusieurs variables**. Prenons des exemples très simples :

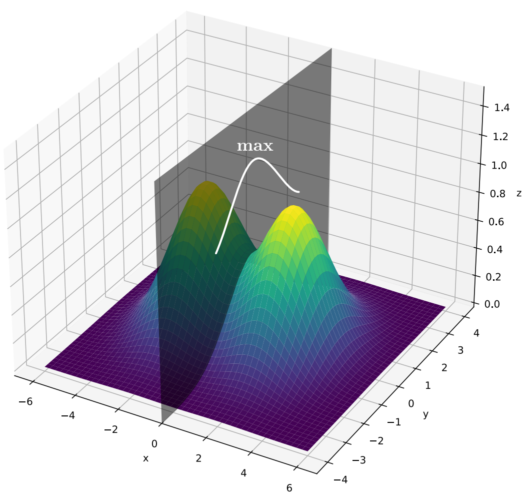
Exemple

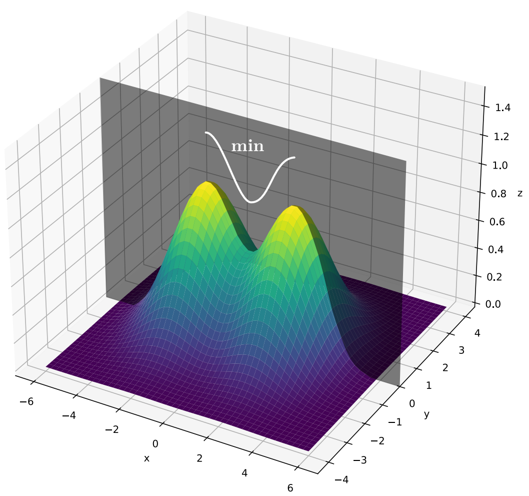
- Prenons un randonneur qui évolue dans la montagne. On peut repérer sa position sur une carte avec des coordonnées cartésiennes (x, y), et associer à chaque position une altitude $h(x, y)$. Donc h est une fonction à deux variables x et y.
$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
- Considérons un satellite de masse m plongé dans le champ de pesanteur terrestre $E_p(\overrightarrow{r})$ (dépendant de sa position $\overrightarrow{r}$). On peut définir son énergie mécanique
$$E_m(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{v}) = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2 + E_p(\overrightarrow{r})$$
Donc et comme la position et la vitesse sont eux mêmes des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors E_m est une fonction à six variables !
$$E_m : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}$$
- Un cas récurrent sera de prendre une (ou plusieurs !) variable · s spatiale · s et une variable temporelle. Par exemple si on fait propager une onde le long d'une corde en soulevant d'un coup sec une extrémité, on pourra s'intéresser à la hauteur de celle-ci h en fonction de la distance à l'extrémité x et du temps t écoulé. Donc $h(x, t)$ a deux variables.

II Différentiation

A Dérivées partielles

Le fait de dépendre de plusieurs variables induit des propriétés particulières pour l'analyse de la fonction. En particulier, les notions de maximum ou minimum prennent un autre sens... Dans le graphique ci-dessous, on reprend l'exemple du randonneur qui passe un col. Dans la direction y, celui-ci est un maximum, mais dans la direction y il s'agit d'un minimum !





Ainsi, la notion de dérivée elle-même doit être redéfinie... En fait l'exemple précédent nous fait bien comprendre que la dérivée doit être définie pour chaque variable, indépendamment l'une de l'autre.

Définition : Dérivée partielle

Soit f une fonction à plusieurs variables. On appelle **dérivée partielle de f par rapport à une variable** x la dérivée de f en considérant que toutes les autres variables sont fixées. On la note

$$\frac{\partial f}{\partial x}$$

Exemple

Prenons la fonction

$$f(x, y) = xy^2$$

Alors on a les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$

Ainsi il devient possible d'avoir un point qui soit à la fois un maximum et un minimum selon la variable par rapport à laquelle on dérive !

B Différentiel d'une fonction à plusieurs variables

Définition : Différentiel d'une fonction à plusieurs variables

Soit un fonction f dépendant de plusieurs n variables $x_1, x_2, ..., x_n$. Alors on peut écrire son différentiel ainsi :

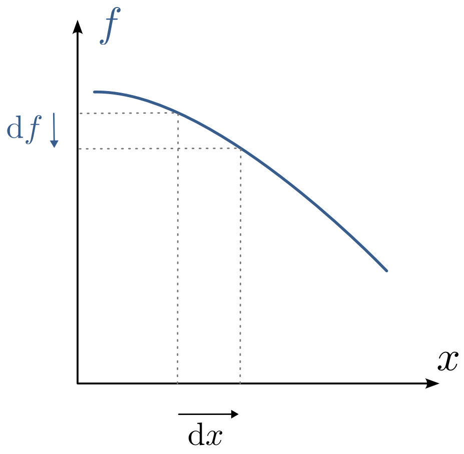
$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n$$

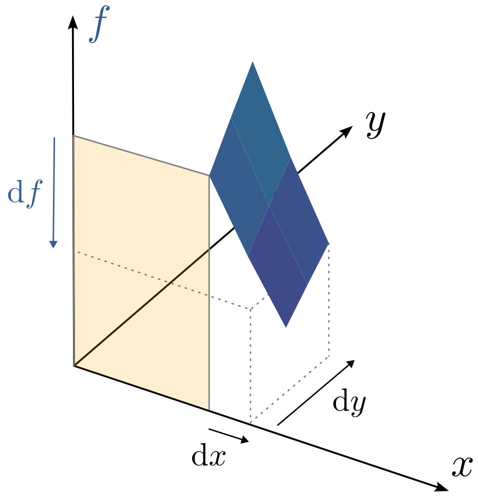
Remarque

Pour une fonction à une variable $f(x)$, on pouvait écrire une relation simple pour une évolution infinitésimale :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

Ce qui traduisait à quel point f varie lorsque l'on fait bouger x de $\mathrm{d}x$. À présent la relation est généralisable : en faisant bouger toutes les variables de quantités infinitésimales, on pondère chaque variation par un coefficient directeur ${}^{\partial f}/_{\partial x_i}$ et on additionne le tout pour trouver la variation de f.





Dans les exemples représentés ci-dessus, la variation de f est négative : $\mathrm{d}f \leq 0$.

Exemple

En thermodynamique on peut écrire l'identité thermodynamique pour U :

$$\mathrm{d}U = -p\mathrm{d}V + T\mathrm{d}S$$

En identifiant cette relation avec la propriété précédente, on comprend que U est en fait une fonction à deux variables V et S, avec des dérivées partielles $-p$ et T :

$$\frac{\partial U}{\partial V} = -p$$
$$\frac{\partial U}{\partial S} = T$$